ГЕОМЕТРИЯ

7-9 КЛАСС

ПРАКТИКУМ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ГОТОВИМСЯ К ГИА

Ю.А. Глазков, М.В. Егупова

Геометрия

7–9 класс

Практикум по планиметрии

Готовимся к ГИА

Москва
«Интеллект-Центр»
2014

УДК 514(075.3)
ББК 22.12я721
Г52

Глазков, Ю.А.
Г52 Геометрия. 7-9 класс. Практикум по планиметрии. Готовимся к ГИА : [учебное пособие] / Ю.А. Глазков, М.В. Егупова. – Москва: «Интеллект-Центр», 2014. – 80 с.

ISBN 978-5-00026-061-6

Пособие предназначено для обобщающего повторения курса планиметрии при подготовке к ГИА. В него включены справочные материалы, рекомендации по осуществлению поиска способов решений задач, многочисленные подробные примеры решений, большое количество задач для самостоятельной работы. Пособие может быть полезно учащимся, учителям математики и репетиторам. Авторы пособия – преподаватели Московского педагогического государственного университета: профессор Ю.А. Глазков и доцент М.В. Егупова, имеющие большой опыт в создании сборников задач и тестов, в том числе для подготовки к ЕГЭ и ГИА.

УДК 514(075.3)
ББК 22.12я721

Генеральный директор издательства «Интеллект-Центр»
М. Б. Миндюк

Редактор Д.П. Локтионов
Художественный редактор Е. Ю. Воробьева

Подписано в печать 19.03.2014. Формат 60х84/8. Бумага типографская.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,0. Тираж 3000 экз. Заказ № 1463

Издательство «Интеллект-Центр»
125445, Москва, ул. Смольная, д. 24, оф. 712

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpd.ru,
8(495)988-63-76, т/ф. 8(496)726-54-10

ISBN 978-5-00026-061-6

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 4

АНАЛИЗИРУЕМ 5

ВЫЧИСЛЯЕМ 13

- **Треугольники** 13
- **Многоугольники** 25
- **Окружности** 35
- **Векторы и координаты** 52

МОДЕЛИРУЕМ 62

ДОКАЗЫВАЕМ 72

ОТВЕТЫ 77

ВВЕДЕНИЕ

Проверке уровня усвоения геометрического материала учащимися, оканчивающими 9 класс, уделяется серьёзное внимание. Каждая третья задача контрольных измерительных материалов (КИМ) государственной итоговой аттестации (ГИА) геометрическая. Шесть из девяти геометрических задач – базового (простейшего) уровня трудности, две – повышенного и одна – высокого уровня трудности. Решения задач базового уровня предъявлять не требуется, нужно только записать ответ. Решения задач более высокого уровня необходимо записать.

При проверке базового уровня математической подготовки учащиеся должны продемонстрировать: владение основными приемами решения задач, знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их признаков и свойств), умение пользоваться математической записью, а также применять математические знания в простейших практических ситуациях.

Проверка владения материалом на повышенном уровне должна помочь выявить наиболее подготовленную часть выпускников, что важно при создании профильных классов.

Большинство геометрических задач ГИА можно отнести к одной из следующих тем:

1) треугольники;
2) многоугольники;
3) окружности;
4) векторы.

В ходе решения задач учащиеся должны показать следующие умения:

- оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения;
- выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами;
- описывать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин;
- проводить доказательные рассуждения.

В соответствии с этим пособие содержит следующие разделы:
Анализируем (задачи типа «верно ли ...»).
Вычисляем (длины, площади, углы, векторы).
Моделируем (реальная математика).
Доказываем (задачи на доказательство).

При подготовке к ГИА учащиеся могут ставить перед собой разные цели:

а) сдать экзамен хотя бы на «3», чтобы получить свидетельство об окончании основной школы;
б) сдать экзамен, как минимум, на «4», чтобы поступить в класс выбранного профиля;
в) систематизировать и обобщить знания по планиметрии, чтобы в 10 – 11 классах успешно освоить курс стереометрии.

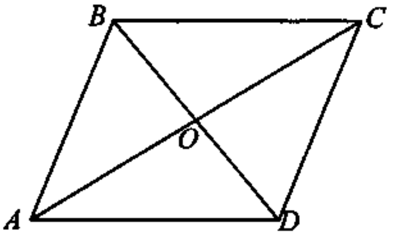
Данное учебное пособие поможет реализовать любую из перечисленных целей.

Для достижения первой цели достаточно научиться решать задания первой части контрольно-измерительных материалов, т.е. задания базового уровня трудности, а также задачи блока «Реальная математика». Для достижения второй и третьей целей нужно научиться решать задания второй части (повышенного и высокого уровня трудности). Но было бы неправильно ориентироваться при этом на содержание, типы только тех задач, которые включены в базу, опубликованную на сайте www.fipi.ru. Поэтому в данное пособие включено большое количество задач, обеспечивающих возможность повторить и систематизировать теоретический материал, научиться решать любую задачу, которая может быть включена в контрольно-измерительные материалы ГИА.

АНАЛИЗИРУЕМ

Для решения геометрических задач необходимо, прежде всего, знать и уметь применять практически все изученные определения и теоремы.

Пример 1. Луч AC, содержащий диагональ параллелограмма $ABCD$, является биссектрисой угла A, длины диагоналей AC и BD равны 24 и 10 соответственно. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.



Решение. По условию задачи AC – биссектриса угла A, следовательно, $\angle BAC = \angle DAC$ (определение биссектрисы угла).

Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, значит, $AD \parallel BC$ (определение параллелограмма).

Следовательно, $\angle BCA = \angle DAC$ (свойство накрест лежащих углов при пересечении параллельных прямых секущей).

Из этого следует, что в треугольнике ABC $\angle BAC = \angle BCA$, поэтому, $BC = BA$ (свойство сторон, лежащих против равных углов треугольника).

Так как диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (свойство параллелограмма), то в соответствии с условием задачи $AO = OC = 12$ и $BO = OD = 5$.

Поскольку $BA = BC$, то треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC (определение равнобедренного треугольника).

В треугольнике ABC $AO = OC$, следовательно, BO – его медиана (определение медианы треугольника).

Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является высотой (свойство медианы равнобедренного треугольника).

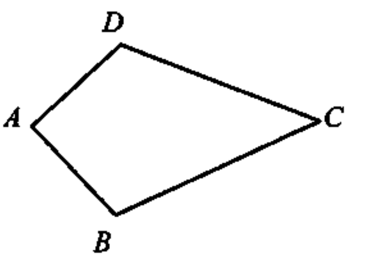
BO – высота треугольника ABC, поэтому $\angle BOA = \angle BOC = 90°$ (определение высоты треугольника), значит, треугольник ABO прямоугольный (определение прямоугольного треугольника).

В прямоугольном треугольнике ABC $AB^2 = AO^2 + BO^2$, следовательно, $AB = 13$ (теорема Пифагора).

Так как $BC = BA = 13$, а противоположные стороны параллелограмма равны, то и $AD = CD = 13$ (свойство параллелограмма).

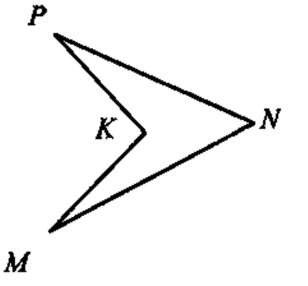
По определению периметра многоугольника $P = AB + BC + CD + DA = 52$.

Ответ: 52.



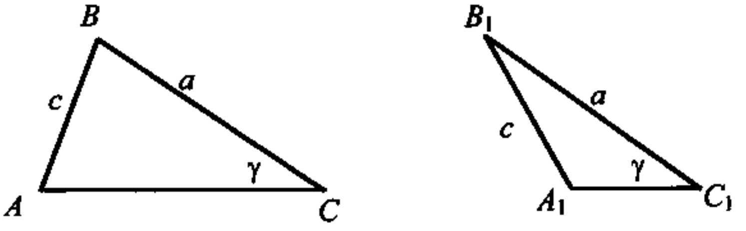
Итак, даже при решении не очень сложной задачи приходится использовать несколько определений и теорем из разных разделов планиметрии (в данном случае, как минимум, 14).

Неточное знание геометрических утверждений, например, пропуск или замена даже одного слова, может полностью исказить их смысл, сделать неверной формулировку. А это, в свою очередь, приведёт к ошибкам в решении и, соответственно, к неверному ответу.



Например, если в утверждении «Четырехугольник, противоположные стороны которого попарно равны, является параллелограммом» пропустить слово «противоположные», то оно становится неверным, т.к. могут быть равными и смежные стороны (см. рисунок), а такой четырехугольник параллелограммом не является (его называют «дельтоид»).

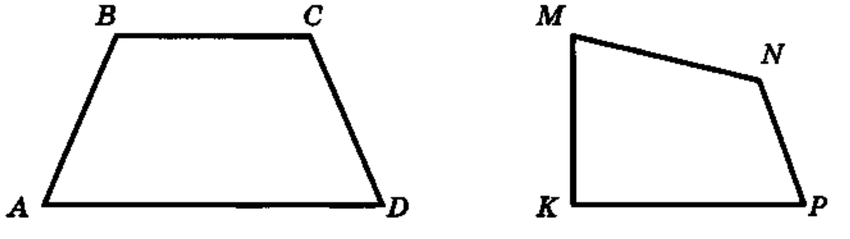
Приведем еще один пример. Утверждение «Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны» (признак равенства треугольников) становится неверным, если пропустить слова «между ними». В утверждениях такого рода подразумевается, что речь идет о всех фигурах (в данном случае – парах треугольников), которые удовлетворяют заданным условиям: равенство соответствующих элементов. Если опустить слова **«между ними»**, то равные углы могут лежать **против** пары равных сторон (см. рисунок).



Поэтому найдутся пары треугольников, имеющие перечисленные равные стороны и углы, но не равные друг другу, т.е. в этом случае утверждение неверно.

И вообще, чтобы установить, что утверждение **верно для любых** фигур, удовлетворяющих его условию, требуется выполнить доказательство с опорой на определения и теоремы. Если же хотите доказать, что утверждение **неверно**, достаточно привести пример, когда оно не выполняется (так называемый **контрпример**). Именно такой контрпример и приведен выше.

К ошибкам в утверждении кроме пропуска слов приводит и случайная, чаще всего неосознанная, **замена** одних понятий другими. Например, при замене в утверждении «Параллелограмм, две смежные стороны которого равны, является ромбом» слова «параллелограмм», словом «четырехугольник» получаем неверное утверждение «Четырехугольник, две смежные стороны которого равны, является ромбом» (на рисунке слева $AB = BC$, справа $KM = MN$).



Разумеется, можно изобразить и параллелограмм с двумя равными смежными сторонами, и он действительно будет ромбом, но, как говорилось ранее, полученное утверждение должно быть верным для **любого** четырехугольника, две смежные стороны которого равны. А приведенные контрпримеры показывают, что требование **«для любого» не выполняется.**

Как было отмечено выше, надо точно помнить и уметь применять формулировки **всех** теорем и определений. Если ученик не помнит, например, что есть такая теорема: «В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон» (неравенство треугольника», то, он может неверно решить следующую задачу.

Пример 2. Две стороны равнобедренного треугольника равны 7 и 15. Найдите его периметр.

Решение. Т.к. в условии задачи не сказано, какая из сторон является основанием треугольника, а какая – боковой стороной, нужно рассмотреть два случая:

1) основание равно 15, соответственно, боковая сторона равна 7;

2) основание равно 7, а боковая сторона равна 15.

В первом случае вторая боковая сторона треугольника также равна 7, поэтому сумма боковых сторон равна 14. Но 14<15, т.е. получилось, что сумма двух сторон треугольника меньше его третьей стороны, а это противоречит **неравенству треугольника**. Значит, треугольника с такими сторонами не существует. Именно этот факт учащиеся часто не учитывают. И поэтому получают «лишний», т.е. неверный результат.

Во втором случае сумма боковых сторон треугольника больше его основания, следовательно, такой треугольник существует, и можно вычислить его периметр: $7 + 15 + 15 = 37$.

Ответ: 37.

Задания для самостоятельной работы

Определите, верны ли следующие утверждения.

1. Если угол равен 50°, то смежный с ним угол тоже равен 50°.
2. Сумма смежных углов равна 180°.
3. Если один из вертикальных углов равен 80°, то другой угол равен 100°.
4. Если два угла с общей вершиной равны, то они вертикальные.
5. Если углы вертикальные, то они равны.
6. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.
7. Если при пересечении двух параллельных прямых третьей внутренние односторонние углы равны 55°, то прямые параллельны.
8. Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
9. Если две прямые перпендикулярны третьей, то они параллельны.
10. Если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
11. Если катеты одного прямоугольного треугольника равны катетам другого треугольника, то такие треугольники равны.
12. Если гипотенуза одного прямоугольного треугольника равна гипотенузе второго треугольника, то такие треугольники равны.
13. Каждая сторона треугольника меньше разности двух других сторон.
14. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.
15. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
16. Сумма острых углов треугольника равна 90°.
17. Сумма углов треугольника равна 180°.
18. Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 180°.
19. Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.
20. Высота равнобедренного треугольника является его медианой.
21. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является высотой этого треугольника.
22. Сумма противолежащих углов параллелограмма равна 180°.
23. Сумма противолежащих углов равнобедренной трапеции равна 180°.
24. Сумма углов трапеции, прилежащих к одной стороне, равна 180°.
25. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°.
26. Четырёхугольник, две стороны которого параллельны, является параллелограммом.
27. Четырёхугольник, две стороны которого параллельны, является параллелограммом или трапецией.
28. Четырёхугольник, в котором две стороны параллельны и две стороны равны, является параллелограммом.
29. Противоположные стороны трапеции попарно параллельны.
30. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

Диагонали равнобедренной трапеции пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

32. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
33. Диагонали равнобедренной трапеции равны.
34. Параллелограмм, диагонали которого равны, является ромбом.
35. Четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.
36. Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.
37. Параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.
38. Диагонали прямоугольника равны.
39. Если три угла одного треугольника равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
40. Если радиус окружности равен 8, а расстояние от центра окружности до прямой равно 5, то прямая и окружность имеют две общие точки.

41. Если радиусы двух окружностей равны 4 и 7, а расстояние между их центрами равно 10, то они не имеют общих точек.
42. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения их сходственных сторон.
43. Площадь треугольника равна половине произведения длин стороны и высоты, проведенной к этой стороне.
44. Площадь параллелограмма равна произведению длин двух его смежных сторон.
45. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
46. Если центральный угол равен 40°, то дуга окружности, на которую он опирается, равна 20°.
47. Сумма противоположных углов в любом вписанном четырёхугольнике равна 180°.
48. Суммы противолежащих сторон в любом описанном четырёхугольнике равны.
49. Центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.
50. Центром окружности, вписанной в правильный треугольник, является точка пересечения его высот.

Выбор утверждения

В одном из заданий контрольных измерительных материалов ГИА (в демонстрационном варианте 2013 и 2014 гг. – это задание № 13) требуется указать, какие из перечисленных утверждений верны (неверны). Особенность такого задания в том, что оно считается правильно выполненным, если указаны **все верные** (или, если требуется, **все неверные**) утверждения. Если учащийся хотя бы раз ошибся, то задание оценивается нулём баллов.

Задания для самостоятельной работы

Замечание. *При выполнении заданий будьте внимательны: какие именно утверждения нужно отмечать (верные или неверные).*

51. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Вписанный в окружность угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.
2) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
3) Четырехугольник, два угла которого равны 110°, а два других – 70°, является трапецией.
4) Если стороны треугольника равны 9, 12 и 16, то он прямоугольный.

52. Укажите номера верных утверждений.

1) Вписанный в окружность угол в 2 раза больше центрального угла, опирающегося на ту же дугу.
2) Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
3) Если два угла четырехугольника равны 100°, а два других – 80°, то он является равнобедренной трапецией.
4) Если стороны треугольника равны 13, 5 и 12, то он прямоугольный.

53. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Вписанный в окружность угол равен половине центрального угла.
2) Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
3) Если два угла четырехугольника равны 120°, а два других – 60°, то он является параллелограммом.
4) Если стороны треугольника равны 6, 8, 10, то он прямоугольный.

54. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) На прямой от данной на ней точки можно отложить только два отрезка данной длины.
2) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.
3) Если один из углов трапеции равен $90°$, то и остальные равны $90°$.
4) Если катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 8, то его площадь равна 72.

55. Укажите номера верных утверждений.

1) На прямой можно отложить только два отрезка данной длины.
2) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между ними равны, то эти треугольники подобны.
3) Если один из углов трапеции равен $18°$, то другой угол при той же боковой стороне равен $72°$.
4) Если катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 8, то его площадь равна 28.

56. Укажите номера верных утверждений.

1) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.
2) На плоскости можно построить только один угол заданной градусной меры.
3) Если один из углов при боковой стороне трапеции равен $102°$, то другой равен $78°$.
4) Если катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 7, то его площадь равна 42.

57. Укажите номера верных утверждений.

1) В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой.
2) Если один из острых углов прямоугольного треугольника равен $18°$, то и другой равен $18°$.
3) Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то он является ромбом.
4) Площадь круга радиуса 3 равна 18π.

58. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) В равнобедренном треугольнике медиана является биссектрисой.
2) Если диагонали параллелограмма равны, то он является квадратом.
3) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$.
4) Длина окружности радиуса 3 равна 6π.

59. Укажите номера верных утверждений.

1) В равнобедренном треугольнике два угла равны.
2) Если диагонали параллелограмма равны, то он является ромбом.
3) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $180°$.
4) Площадь круга радиуса 4 равна 16π.

60. Укажите номера верных утверждений.

1) Образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей односторонние углы равны.
2) Если сумма двух углов треугольника равна $90°$, то этот треугольник равнобедренный.
3) Существует треугольник со сторонами 2, 8, 9.
4) Уравнением окружности с центром $Q(-1; -4)$ и радиусом 3 является уравнение $(x+1)^2+(y+4)^2=9$.

61. Укажите номера верных утверждений.

1) Образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей накрест лежащие углы равны.
2) Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
3) Треугольника со сторонами 2, 8, 11 не существует.
4) Уравнением окружности с центром $Q(-2;\ -3)$ и радиусом 5 является уравнение $(x-2)^2+(y-3)^2=25$.

62. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Сумма односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, равна 180°.
2) Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.
3) Существует треугольник со сторонами 7, 2, 4.
4) Уравнением окружности с центром $Q(2;\ 3)$ и радиусом 7 является уравнение $(x-3)^2+(y-2)^2=49$.

63. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Сумма накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, всегда равна 180°.
2) Если биссектриса треугольника является его медианой, то этот треугольник равнобедренный.
3) Треугольника со сторонами 7, 8, 9 не существует.
4) Уравнением окружности с центром $Q(2;\ 3)$ и радиусом 5 является уравнение $(x-2)^2+(y-3)^2=5$.

64. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Если один из вертикальных углов равен 46°, то второй равен 134°.
2) Если сумма образованных при пересечении двух прямых третьей накрест лежащих углов равна 180°, то эти прямые параллельны.
3) Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
4) Если расстояние между центрами двух окружностей равно 5, а их радиусы 3 и 4, то окружности пересекаются.

65. Укажите номера верных утверждений.

1) Если один из смежных углов равен 127°, то второй равен 53°.
2) Если образованные при пересечении двух прямых третьей односторонние углы равны, то эти прямые параллельны.
3) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
4) Если расстояние между центрами двух окружностей равно 9, а их радиусы 2 и 6, то окружности не имеют общих точек.

66. Укажите номера верных утверждений.

1) Если один из смежных углов равен 27°, то второй равен 173°.
2) Если образованные при пересечении двух прямых третьей накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны.
3) Если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
4) Если расстояние между центрами двух окружностей равно 8, а их радиусы 2 и 6, то окружности не имеют общих точек.

67. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Если один из вертикальных углов равен 27°, то и второй равен 27°.
2) Если сумма образованных при пересечении двух прямых третьей односторонних углов равна 180°, то эти прямые параллельны.
3) Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
4) Если расстояние между центрами двух окружностей равно 7, а их радиусы 2 и 6, то окружности не имеют общих точек.

68. Укажите номера верных утверждений.

1) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.
2) Сумма вертикальных углов равна 180°.
3) Сумма двух соседних углов параллелограмма равна 180°.
4) Если основания трапеции равны 13 и 25, то ее высота равна 19.

69. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Если в треугольнике ABC $\angle A = 22°$, $\angle C = 67°$, то сторона AB наибольшая.
2) Через любые три точки проходит прямая.
3) Тангенсом острого угла треугольника называется отношение противолежащей стороны треугольника к прилежащей.
4) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны.

70. Укажите номера верных утверждений.

1) Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме их радиусов, то эти окружности касаются.
2) Вписанные углы окружности, опирающиеся на одну ее дугу, равны.
3) Если вписанный угол равен 17°, то центральный угол равен 34°.
4) Вокруг любого четырехугольника можно описать окружность.

71. Укажите номера верных утверждений.

1) Вписанный в окружность угол равен половине хорды, на которую он опирается.
2) Если диаметры двух окружностей равны 7 и 13, а расстояние между их центрами равно 20, то эти окружности касаются.
3) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.
4) Треугольник со сторонами 5, 12 и 13 остроугольный.

72. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Диагонали ромба равны.
2) Сумма углов трапеции равна 360°.
3) Если один из смежных углов равен 40°, то и другой угол равен 40°.
4) Синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.

73. Укажите номера **неверных** утверждений.

1) Если при пересечении двух прямых третьей прямой накрест лежащие углы равны 117°, то эти прямые параллельны.
2) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

3) Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то эти треугольники равны.
4) Тупоугольным называется треугольник, у которого все углы тупые.

74. Укажите номера неверных утверждений.

1) Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
2) Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащих к ней углам другого треугольника, то эти треугольники равны.
3) Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла.
4) Любые две прямые имеют хотя бы одну общую точку.

75. Укажите номера верных утверждений.

1) Сумма углов выпуклого пятиугольника равна 800°.
2) Диагонали прямоугольника лежат на биссектрисах его углов.
3) Две различные прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.
4) Треугольник со сторонами 1, 13 и 14 не существует.

ВЫЧИСЛЯЕМ

Во всех задачах на вычисления требуется найти значение одной из геометрических величин:

1) длины отрезка;
2) величины угла;
3) площади фигуры.

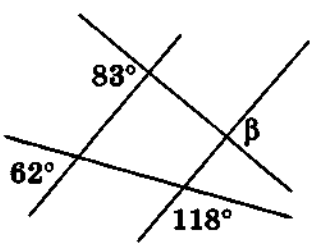
Треугольники

В задачах, относящихся к первой теме, требуется вычислить величины углов или отрезков (сторон, медиан, высот, биссектрис и т.д.), а также площади треугольников. Для решения этих задач требуется, прежде всего, уметь использовать определения углов различных видов (острых, тупых, прямых, вертикальных смежных и т.д.), их свойства, признаки равенства треугольников, а также свойства и признаки параллельных прямых. Необходимо знать свойства треугольников различных видов (равнобедренного, прямоугольного и др.), их медиан, высот и биссектрис, находить равные и подобные треугольники, уметь вычислять площадь треугольника разными способами. Поэтому в период подготовки к экзамену полезно иметь под рукой учебник или справочник.

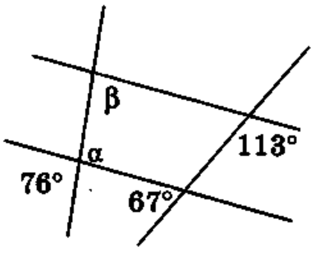
Ниже приведены простейшие задачи, решая которые, вы сможете повторить теоретический материал.

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите смежные углы, если один из них в 1,5 раза больше прямого.
2. Один из смежных углов на 32° больше другого. Найдите градусную меру острого угла.
3. Сумма вертикальных углов равна 148°. Найдите каждый из них.
4. Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если сумма трех из них равна 198°.
5. Найдите стороны равнобедренного треугольника, периметр которого равен 117 см, а боковая сторона на 6 см больше основания.
6. В треугольнике ABC точка O – середина стороны AC, $\angle BOA=90°$, $\angle ABC=40°$, $\angle BAO=50°$. Найдите $\angle OBC$ и $\angle BCA$.
7. Внешний угол равнобедренного треугольника, противолежащий основанию, равен 108°. Найдите угол треугольника при основании.
8. Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 116°. Найдите градусную меру угла между боковой стороной и медианой, проведенной к основанию треугольника.
9. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины при основании, образует с основанием угол, равный 34°. Какой угол проведенная к основанию высота образует с боковой стороной?
10. Угол треугольника равен 93°, а один из внешних углов равен 168°. Найдите острый угол треугольника, не смежный с данным внешним.
11. По данным, указанным на рисунке, найдите градусную меру угла β.



12. По данным, указанным на рисунке, найдите угол, образованный при пересечении биссектрис углов α и β.



13. В треугольниках ABC и ABD $\angle CAB = \angle DAB$, $\angle CBA = \angle DBA$, $BC = 8$ см. Найдите BD.

14. Две стороны равнобедренного треугольника равны 17 и 8. Чему равен его периметр?

Вычисления величин углов, сторон и площади треугольника упрощаются, если условия задачи позволяют установить, что данный треугольник **прямоугольный.**

Одним из **признаков** прямоугольного треугольника служит, теорема, обратная теореме Пифагора: *«Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник прямоугольный»*. **Например**, треугольник со сторонами 5, 12 и 13 является прямоугольным, потому что $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Еще один признак: *«Если сумма двух углов треугольника равна 90°, то треугольник является прямоугольным»*. **Например**, треугольник с углами 15° и 75° является прямоугольным, т.к. 15° + 75° = 90°.

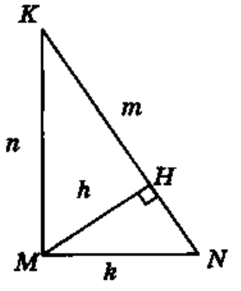
Третьим, нередко используемым признаком, является следующий: *«Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой проведена, то треугольник является прямоугольным»*. **Например**, если медиана треугольника равна 13, а сторона, к которой она проведена, равна 26, то этот треугольник обязательно прямоугольный.

Для «решения» прямоугольных треугольников необходимо знать, что:

1) квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора);

2) синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе, косинус – отношению прилежащего катета к гипотенузе, тангенс – отношению противолежащего углу катета к прилежащему;

3) площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов или половине произведения гипотенузы и проведенной к ней высоты, или половине произведения гипотенузы, катета и синуса угла, заключенного между ними.



Таким образом, если в треугольнике KMN $\angle M = 90°$, $MH \perp KN$, $KN = m$, $KM = n$, $MN = k$, $MH = h$, то:

1) $m^2 = k^2 + n^2$;

2) $\sin K = \dfrac{k}{m}$, $\cos K = \dfrac{n}{m}$, $\operatorname{tg} K = \dfrac{k}{n}$ $\left(\operatorname{tg} K = \dfrac{\sin K}{\cos K}\right)$;

3) $S = 0{,}5\,kn$, $S = 0{,}5\,mh$, $S = 0{,}5\,m \cdot n \cdot \sin K$.

Полезно также помнить, что синус одного острого угла прямоугольного треугольника равен косинусу другого его острого угла. **Например**, $\sin K = \cos N$, $\cos K = \sin N$. Необходимо помнить основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, где α – величина угла. Отметим, что эта формула верна не только для острых углов, но и для всех углов от 0° до 180°. По этой формуле, зная синус угла, можно найти его косинус, и наоборот.

Например, если $\sin\alpha = 0{,}6$, то $0{,}6^2 + \cos^2\alpha = 1$, откуда получаем два значения косинуса: $\cos\alpha = 0{,}8$ или $\cos\alpha = -0{,}8$ (в первом случае угол α острый, а во втором тупой).

Пример 1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\sin A = 0{,}6$, $AC = 8$. Найдите AB.

Решение. Стороны AB и AC связаны с углом A соотношением:

$$\frac{AC}{AB} = \cos A. \qquad (*)$$

Значит, чтобы найти AB, нужно вычислить $\cos A$. Используя основное тригонометрическое тождество, получим: $0{,}6^2 + \cos^2 A = 1$. Откуда $\cos A = \pm\sqrt{1 - 0{,}6^2}$. Косинус острого угла положительный, следовательно, $\cos A = 0{,}8$.

Из формулы (*) получаем: $\dfrac{8}{AB} = 0{,}8$. Откуда $AB = \dfrac{8}{0{,}8} = 10$.

Ответ: 10.

Пример 2. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

Решение. Пусть дан треугольник ABC с прямым углом C.

Тогда $S = 0{,}5AC \cdot CB = 0{,}5AB \cdot h$, где h – высота треугольника, проведенная к гипотенузе.

Отсюда получаем: $15 \cdot 20 = AB \cdot h$.

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{3^2 5^2 + 4^2 5^2} = 5\sqrt{3^2 + 4^2} = 25.$$

Итак, $15 \cdot 20 = 25 \cdot h$, следовательно, $h = \dfrac{15 \cdot 20}{25} = 12$.

Ответ: 12.

Замечание. Обратите внимание: найти неизвестную сторону или высоту треугольника можно, вычислив его площадь по двум разным формулам!

Пример 3. В треугольнике KMT $KM = 15$, $MT = 12$, $TK = 9$. Найдите высоту треугольника, проведенную к его большей стороне.

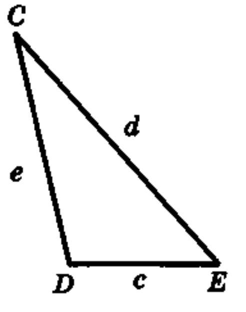
Решение. Поскольку $12^2 + 9^2 = 15^2$, треугольник KMT является прямоугольным, а его гипотенуза – наибольшая сторона KM – равна 15. Используя две формулы площади прямоугольного треугольника, получаем: $0{,}5 \cdot 15 \cdot h = 0{,}5 \cdot 12 \cdot 9$. Отсюда $h = \dfrac{12 \cdot 9}{15} = 7{,}2$.

Ответ: 7,2.

Наиболее важными для решения произвольных (не прямоугольных) треугольников являются три теоремы:

1) теорема косинусов;
2) теорема синусов;
3) теорема Герона.

Перечисленным утверждениям соответствуют следующие формулы.



Пусть в треугольнике CDE $CE = d$, $DE = c$, $CD = e$. Тогда:

1) $d^2 = c^2 + e^2 - 2ce\cos D$;

2) $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin D}{d} = \dfrac{\sin E}{e}$;

3) $S = \sqrt{p(p-c)(p-d)(p-e)}$, где $p = \dfrac{c+d+e}{2}$.

Пример 4. В треугольнике ABC $\angle B = 135°$, $AB = 3\sqrt{2}$, $AC = 5$. Найдите площадь треугольника.

Решение. Пусть $BC = x$. Тогда по теореме косинусов получаем:

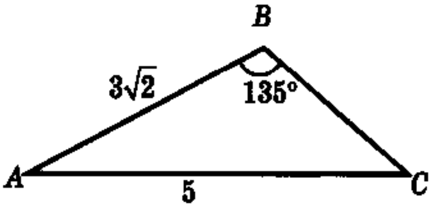
$$AC^2 = AB^2 + x^2 - 2AB \cdot x \cdot \cos B.$$

Подставив данные, получим: $5^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + x^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot x \cdot \cos 135°$,

т.е. $25 = 18 + x^2 + 6x$ или $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Корни уравнения – числа –7 и 1. Следовательно, длина стороны BC равна 1.

Применив формулу $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$, найдем площадь треугольника: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1{,}5$.



Ответ: 1,5.

Пример 5. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{6}$, $BC = 2$, $\angle C = 60°$. Найдите градусную меру угла B.

Решение. Известны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Требуется найти угол, противолежащий третьей стороне.

По теореме синусов можно найти угол A, противолежащий второй из данных сторон, а затем, вычитая из 180° сумму углов A и C, получим искомый угол B.

Итак, $\frac{\sqrt{6}}{\sin 60°} = \frac{2}{\sin A}$, откуда $\sin A = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $\angle A = 45°$ или $\angle A = 180° - 45° = 135°$.

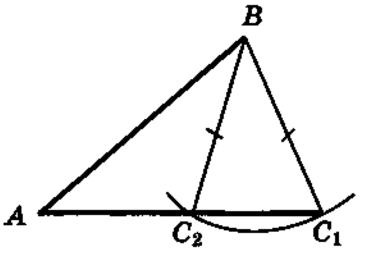
Поскольку в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а $\sqrt{6} > \sqrt{4} = 2$, т.е. $AB > BC$, то $\angle C > \angle A$. Следовательно, угол A не может быть тупым, и потому он равен 45°.

Тогда $\angle B = 180° - (60° + 45°) = 75°$.

Ответ: 75°.

Пример 6. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{6}$, $BC = 2$, $\angle A = 45°$. Найдите угол C.

Решение. Известны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Требуется найти угол, противолежащий второй из данных сторон.



По теореме синусов получаем: $\frac{\sqrt{6}}{\sin C} = \frac{2}{\sin 45°}$.

Отсюда $\sin C = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому $\angle C = 60°$ или $\angle C = 180° - 60° = 120°$.

Из рисунка видно, что возможны оба варианта.

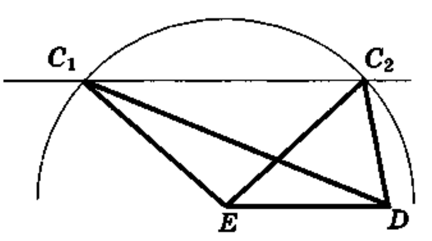
Ответ: 60° или 120°.

Пример 7. В треугольнике CDE $DE = 11$, $EC = 13$, $\sin E = \frac{12}{13}$. Найдите CD.

Решение. Известны две стороны треугольника и тригонометрическая функция угла между ними. Требуется найти третью сторону.

Почти типичная задача на применение теоремы косинусов, только надо вычислить сначала косинус угла E. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем: $\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 E = 1$, откуда $\cos^2 E = \left(\frac{5}{13}\right)^2$. Для получения значения косинуса важно знать, каков угол E – острый или тупой, т.к. косинус тупого угла отрицательный. Поскольку синус и острого, и тупого угла положительный, определить по нему вид угла невозможно.

Попытаемся построить данный треугольник.



Построим отрезок ED длиной 11 ед., полуокружность с центром E радиусом 13 ед. и прямую C_1C_2 на расстоянии 12 ед. от прямой ED.

Очевидно, существуют два треугольника, у которых синусы угла E равны: тупоугольный и остроугольный.

Поэтому получаем два значения $\cos E = \pm\frac{5}{13}$.

Применяя теорему косинусов, получаем:

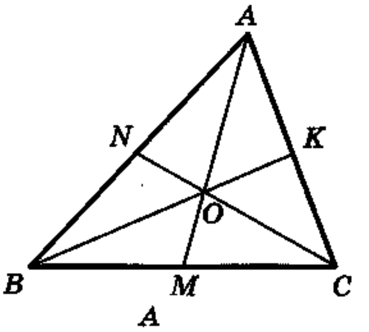
$$CD^2 = 13^2 + 11^2 - 2 \cdot 13 \cdot 11 \cdot \frac{5}{13} \text{ или } CD^2 = 13^2 + 11^2 + 2 \cdot 13 \cdot 11 \cdot \frac{5}{13}.$$

Следовательно, $CD = 6\sqrt{5}$ или $CD = 20$.

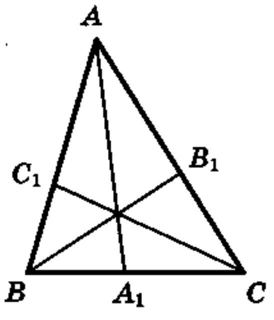
Ответ: $6\sqrt{5}$ или 20.

В задачах о треугольниках часто рассматриваются высоты, медианы и биссектрисы. В равностороннем треугольнике все три отрезка, проведённые из одной вершины, совпадают. В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведённые к основанию, совпадают.

Все три медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины. Например, если отрезки AM, BK и CN – медианы треугольника ABC, то $AO : OM = BO : OK = CO : ON = 2 : 1$.



Все три биссектрисы треугольника также пересекаются в одной точке, и каждая биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Например, если отрезок AA_1 – биссектриса треугольника ABC, то $A_1B : A_1C = AB : AC$.

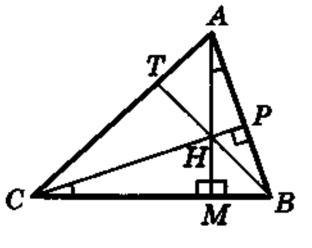


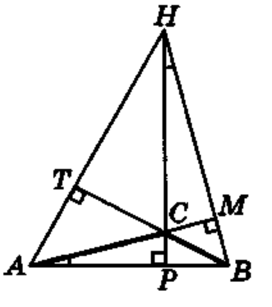
Важно помнить, что медианы и биссектрисы всегда пересекаются во внутренней точке треугольника. Высоты треугольника могут пересекаться и во внешней точке.

Пример 8. Прямые, содержащие высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, $CH=AB$. Найдите угол ACB.

Решение. Возможны две ситуации:

1) треугольник ABC остроугольный; 2) треугольник ABC тупоугольный.





Рассмотрим первую ситуацию.

Прямоугольные треугольники BAM и BCP имеют общий угол B, следовательно, $\angle BAM = \angle BCP$. В прямоугольных треугольниках BAM и CHM $CH = AB$, $\angle BAM = \angle MCH$. Значит, $\Delta BAM = \Delta CHM$ (по гипотенузе и острому углу). Отсюда получаем $CM = AM$, а в равнобедренном прямоугольном треугольнике CAM, острый угол равен 45°, т.е. $\angle ACB = 45°$.

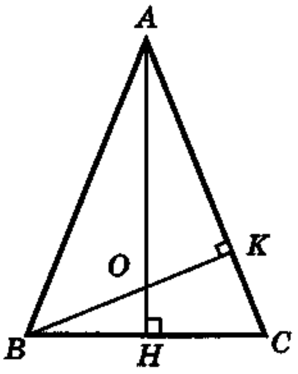
Рассмотрим вторую ситуацию.

Прямоугольные треугольники BAM и BHP имеют общий угол B, следовательно, $\angle BAM = \angle BHP$. Значит, $\Delta BAM = \Delta CHM$ (по гипотенузе и острому углу). Отсюда получаем $CM = BM$, а в равнобедренном прямоугольном треугольнике CBM острый угол BCM равен 45°.

Следовательно, в треугольнике ABC $\angle ACB = 135°$.

Ответ: 45° или 135°.

Пример 9. Площадь равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равна 160, боковая сторона равна 20. Высоты BK и AH пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABO.



Решение. $S_{ABC} = 0{,}5BK \cdot AC$, значит, $BK = \dfrac{2 \cdot 160}{20} = 16$.

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12.$$

Высота AH равнобедренного треугольника ABC является его биссектрисой, следовательно, AO – биссектриса треугольника ABK. Поэтому

$\dfrac{KO}{OB} = \dfrac{AK}{AB}$, а значит, $\dfrac{KO}{OB} + 1 = \dfrac{AK}{AB} + 1$ и $\dfrac{BK}{OB} = \dfrac{AK + AB}{AB}$.

Отсюда получаем $\dfrac{16}{OB} = \dfrac{32}{20}$, т.е. $OB = 10$.

Т.к. AK – высота треугольника ABO,

$$S_{ABO} = 0{,}5BO \cdot AK = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 12 = 60.$$

Ответ: 60.

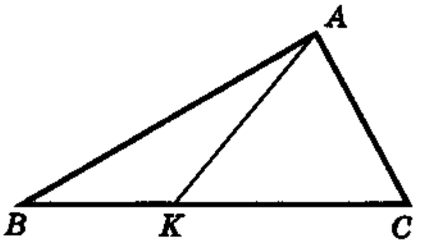
Замечание. В решении использован простой, но эффективный прием: построение производной пропорции: прибавляя к обеим частям (вычитая из обеих частей) число 1, можно получить новую необходимую пропорцию.

Например, по свойству биссектрисы AT треугольника ABC имеем: $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{AB}{AC}$. Нам известны стороны AB и AC и нужно найти отношение $\dfrac{TC}{BC}$. Выполним преобразования: $\dfrac{TB}{TC} + 1 = \dfrac{AB}{AC} + 1$, $\dfrac{TB + TC}{TC} = \dfrac{AB + AC}{AC}$, $\dfrac{BC}{TC} = \dfrac{AB + AC}{AC}$, $\dfrac{TC}{BC} = \dfrac{AC}{AB + AC}$. Искомое отношение получено.

Для вычисления площади треугольника можно использовать несколько различных формул.

Обозначим длины сторон треугольника ABC, противолежащих углам A, B и C, буквами a, b, c соответственно, проведенные к этим сторонам высоты – буквами h_a, h_b, h_c соответственно, полупериметр треугольника – буквой p, а площадь треугольника – буквой S. Тогда основная формула площади треугольника выглядит следующим образом:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$



Из этой формулы следует:

если точка K лежит на стороне BC треугольника ABC, то $S_{ABK} : S_{ACK} = BK : KC$.

В частности, если AK – медиана, то $S_{ABK} : S_{ACK} = 1$,

значит, $S_{ABK} = S_{ACK} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$.

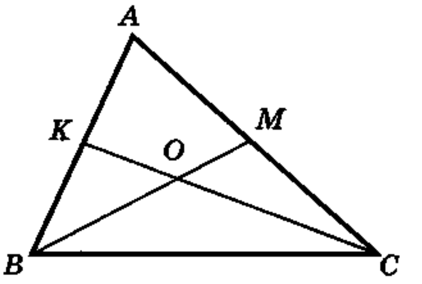
Если AK – биссектриса треугольника ABC, то

$$BK : KC = AB : AC,$$

значит,

$$S_{ABK} : S_{ACK} = AB : AC.$$

Пример 10. В треугольнике ABC $AB = 13$, $BC = 21$, $AC = 20$. Найдите площадь треугольника, образованного стороной AC, медианой BM и биссектрисой CK данного треугольника.



Решение. Пусть медиана BM и биссектриса CK треугольника ABC пересекаются в точке O. Тогда CO – биссектриса треугольника BCM, и по свойству биссектрис треугольника

$$BO : OM = BC : CM = 21 : 10.$$

По формуле Герона: $S_{ABC} = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 7} = 126$ (27 – полупериметр треугольника).

BM – медиана треугольника ABC, следовательно, $S_{BCM} = 0{,}5 S_{ABC} = 63$.

Так как $\frac{BO}{OM} = \frac{21}{10}$, то $\frac{S_{COB}}{S_{COM}} = \frac{21}{10}$.

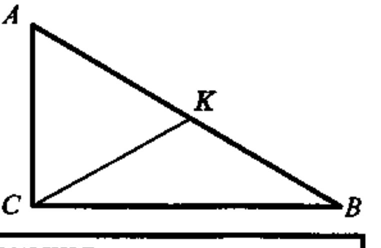
Отсюда получаем: $\frac{S_{COB}}{S_{COM}} + 1 = \frac{21}{10} + 1$, следовательно, $\frac{S_{BCM}}{S_{COM}} = \frac{31}{10}$, и $S_{COM} = \frac{10}{31} S_{BCM}$.

Итак, $S_{COM} = \frac{630}{31} = 20\frac{10}{31}$.

Ответ: $20\frac{10}{31}$.

Замечание. В рассмотренных примерах решений задач приведены достаточно подробные объяснения шагов решения (ссылки на условия задачи, определения и теоремы школьного курса планиметрии). Это сделано с целью обеспечения понимания хода решения, рассуждений. В экзаменационной работе такие подробные объяснения приводить необязательно, но проверяющий должен понимать, откуда вытекают сделанные выводы. Это требование отражено в критериях оценки выполнения задания.

Пример 11. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CK этого треугольника.

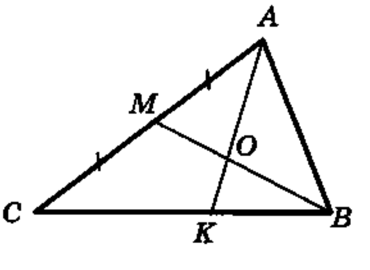


Решение. $CK = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5$.

Ответ: 5.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Получен верный обоснованный ответ
1	При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, возможно приведшая к неверному ответу
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Пример 12. Площадь треугольника ABC равна 40. Биссектриса AK пересекает медиану BM в точке O, при этом: $BK : CK = 3 : 2$. Найдите площадь четырёхугольника $OKCM$.



Решение. Пусть $AM = MC = x$. По свойству биссектрисы $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC} = \frac{3}{2}$, откуда $AB = 3x$.

В треугольнике ABM AO – биссектриса, следовательно, $\frac{BO}{OM} = \frac{AB}{AM} = 3$.

Пусть $S_{ABC} = S$, тогда $S_{ACK} = \frac{CK}{CB} \cdot S = \frac{2}{5}S$.

$S_{AMO} = \frac{MO}{MB} = \frac{MO}{MB} \cdot \frac{AM}{AC} \cdot S = \frac{5}{8}$.

Итак, $S_{OKCM} = S_{ACK} - S_{AMO} = \frac{2}{5}S - \frac{S}{8} = \frac{11}{40}S = 11$.

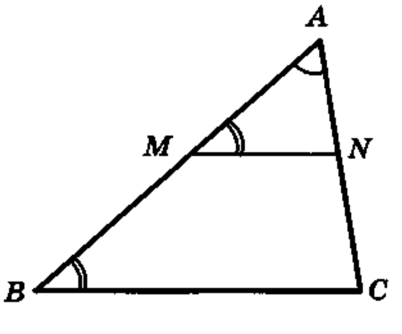
Ответ: 11.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
3	Ход решения верный, чертеж соответствует условию задачи, но пропущены существенные объяснения или допущена вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	*Максимальный балл*

Задания для самостоятельной работы

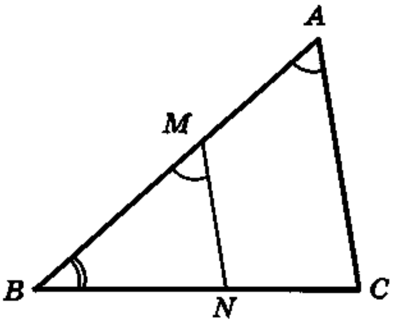
15. В треугольнике KMH угол M прямой, синус угла H равен 0,25. Найдите косинус угла K.
16. В треугольнике BCD $\angle D = 90°$, $BC = 26$, $\cos C = \frac{12}{13}$. Найдите CD.
17. В треугольнике OPT $\angle O = 90°$, $PT = 15$, $\cos P = 0{,}8$. Найдите OT.
18. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $AB = 14\sqrt{3}$. Найдите высоту, проведенную из вершины наибольшего угла треугольника.
19. В треугольнике CDE $CD = 1$, $DE = 2\sqrt{6}$, $EC = 5$. Найдите высоту треугольника, проведенную к его большей стороне.
20. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O, $AH = BC = 8\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABO.
21. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O, $AK = 12$, $KC = 8$. Найдите AO.
22. Биссектриса AM и медиана BK прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке O, $AB = 8$, $BC = 6$. Найдите отношение $BO : OK$.
23. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $AB = 8$, $BC = 7$. Найдите периметр треугольника.
24. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, отрезок AT – биссектриса треугольника, $\angle BAT : \angle ATB = 1 : 5$, $AB = 12\sqrt{2}$. Найдите AC.
25. В треугольнике ABC $AB = 17$, $BC = 15$, $AC = 8$, отрезок AO – биссектриса треугольника. Найдите площадь треугольника ABO.
26. В треугольнике CDE $\angle D = 60°$, $CD=6$, $CE = 2\sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CDE.

Решение большого количества задач основано на подобии треугольников. Ситуации, в которых встречаются подобные треугольники, весьма разнообразны. Например, имеется отрезок, соединяющий внутренние точки двух сторон треугольника так, что отсекается треугольник, два угла которого равны двум углам исходного треугольника (рис. 1 – 4). По первому признаку подобия эти треугольники подобны.



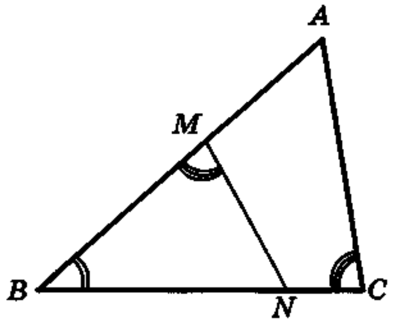
$\triangle AMN \sim \triangle ABC$

Рис. 1



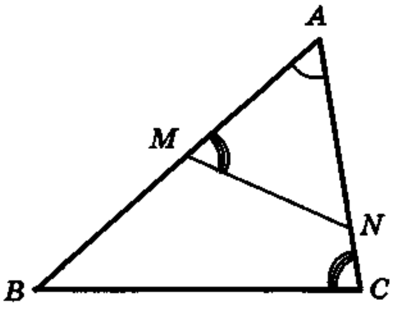
$\triangle MBN \sim \triangle ABC$

Рис. 2



$\triangle NBM \sim \triangle ABC$

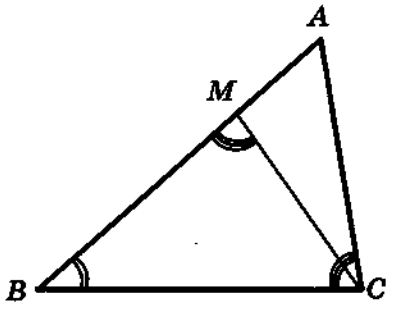
Рис. 3



$\triangle ANM \sim \triangle ABC$

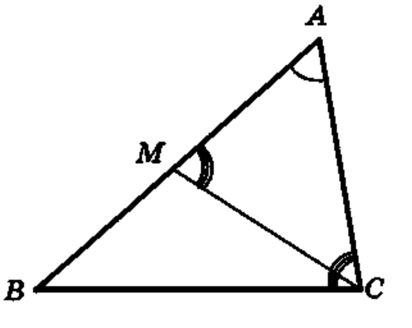
Рис. 4

Один из концов такого отрезка может совпадать с вершиной треугольника ABC (рис. 5 – 6).



$\triangle CBM \sim \triangle ABC$

Рис. 5



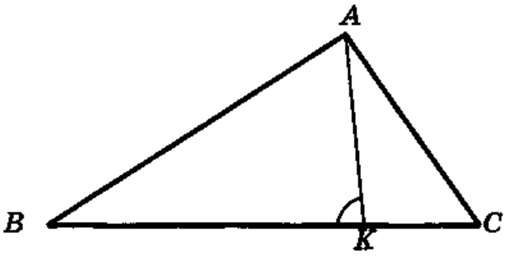
$\triangle ACM \sim \triangle ABC$

Рис. 6

Пример 13. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle B + \angle C = \angle AKB$, $AK = 5$, $BK = 16$, $KC = 2$. Найдите AB.

Решение. Угол AKB является внешним углом треугольника AKC, поэтому

$$\angle AKB = \angle KAC + \angle C.$$



Но, по условию задачи, $\angle B + \angle C = \angle AKB$, значит, $\angle KAC = \angle B$.

В треугольниках ABC и KAC угол C общий, $\angle KAC = \angle B$, следовательно, они подобны.

Отсюда получаем: $\dfrac{AB}{AK} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{KC}$.

Из пропорции $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{KC}$ получаем $\dfrac{16+2}{AC} = \dfrac{AC}{2}$.

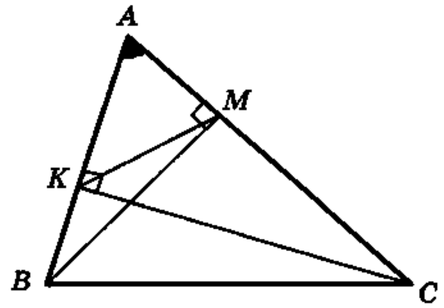
Значит, $AC^2 = 36$, $AC = 6$.

Из пропорции $\dfrac{AB}{AK} = \dfrac{BC}{AC}$ получаем $\dfrac{AB}{5} = \dfrac{18}{6}$.

Следовательно, $AB = 15$.

Ответ: 15.

Пример 14. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $BC = 10$, отрезки BM и CK – высоты. Найдите KM.



Решение. Прямоугольные треугольники ABM и ACK подобны (по двум углам), следовательно, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AK}{AC}$.

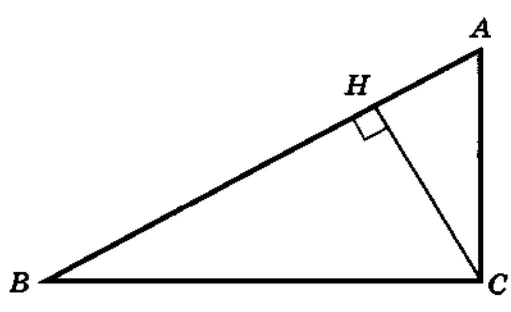
В треугольниках ABC и AMK угол A общий, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AK}{AC}$. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle AMK$ (второй признак подобия), поэтому $\dfrac{KM}{BC} = \dfrac{AM}{AB} = \cos A$.

Итак, $\dfrac{KM}{10} = \dfrac{1}{2}$, следовательно, $KM = 5$.

Ответ: 5.

Если треугольник прямоугольный, а отрезок, проведенный из вершины прямого угла, является его высотой, то получается три подобных треугольника:

$$\triangle ACH \sim \triangle CBH \sim \triangle ABC.$$



Отсюда получаем:

1. $AH : CH = CH : BH$, значит, $CH^2 = AH \cdot BH$.

2. $AH : AC = AC : AB$, значит, $AC^2 = AH \cdot AB$.

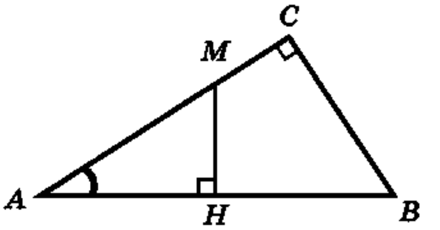
3. $BH : BC = BC : AB$, значит, $BC^2 = BH \cdot AB$.

4. Разделив почленно равенство $AC^2 = AH \cdot AB$ на равенство $BC^2 = BH \cdot AB$, получаем: $AC^2 : BC^2 = AH : BH$.

Впрочем, достаточно помнить лишь первую формулу. Например, зная длины отрезков AH и BH, легко вычислить CH^2, а затем по теореме Пифагора найти AC^2.

Пример 15. Из точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр MH к гипотенузе AB. Найдите площадь треугольника AMH, если $AB = 10$, $AM = 5$, $MC = 3$.

Решение. В прямоугольном треугольнике ABC



$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - (5+3)^2} = 6.$$

$$S_{ABC} = 0,5 \cdot AC \cdot BC = 0,5 \cdot 8 \cdot 6 = 24.$$

$\Delta AMH \sim \Delta ABC$, следовательно,

$$\frac{S_{AMH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Отсюда получаем:

$$S_{AMH} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6.$$

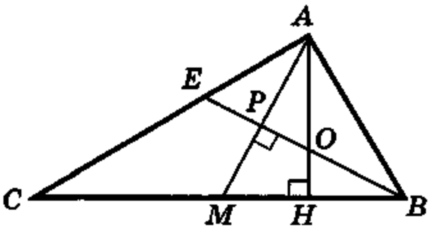
Ответ: 6.

В приведенном решении было использовано свойство площадей подобных фигур: *отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия* (для многоугольников и треугольников – квадрату отношения сходственных сторон).

Рассмотрим еще одну задачу на применение этого свойства площадей.

Пример 16. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 10$, $AC = 3\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника, образованного высотой AH, медианой AM и биссектрисой BE данного треугольника.

Решение. Пусть биссектриса BE треугольника ABC пересекает высоту AH в точке O, а медиану AM – в точке P. Выразим катет AH прямоугольных треугольников ABH и ACH через их гипотенузы и катеты:



$$AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2.$$

Пусть $BH = x$, тогда получим:

$$5^2 - x^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 - (10 - x)^2.$$

Корень полученного уравнения равен 4, т.е. $BH = 4$.

Значит, $AH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

В прямоугольном треугольнике AMH

$$HM = BM - BH = 5 - 4 = 1.$$

Тогда

$$AM = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$S_{AHM} = 0,5 \cdot 3 \cdot 1 = 1,5.$$

Так как AM – медиана,

$$BM = 10 : 2 = 5 = AB.$$

Поэтому в треугольнике ABM биссектриса BP является также высотой и медианой. Следовательно, в треугольнике APO

$$\angle APO = 90°,\ AP = 0,5AM = 0,5\sqrt{10}.$$

Прямоугольные треугольники AHM и APO подобны, следовательно,

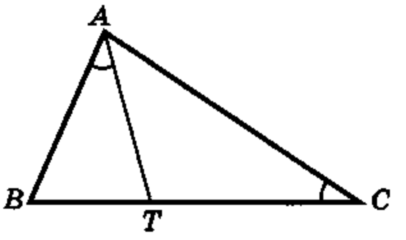
$$S_{APO} : S_{AHM} = (AP : AH)^2 = \left(0,5\sqrt{10} : 3\right)^2 = 5 : 18.$$

Итак, $S_{APO} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{12}$.

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Пример 17. Сторона AC треугольника ABC равна $3\sqrt{13}$. На стороне BC отмечена точка T так, что $\angle TAB = \angle C$. Найдите площадь треугольника ABC, если $CT = 9$, $TB = 4$.

Решение. В треугольниках ABC и TAB угол B общий, $\angle TAB = \angle C$, следовательно, они подобны.



Отсюда получаем: $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{TB}$.

Из этой пропорции следует: $\frac{9+4}{AB} = \frac{AB}{4}$.

Значит, $AB^2 = 13 \cdot 4$, $AB = 2\sqrt{13}$.

Так как $AC^2 + AB^2 = \left(3\sqrt{13}\right)^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 = 13 \cdot 13 = BC^2$,

то треугольник ABC является прямоугольным с катетами AB и AC.

Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13} = 39$.

Ответ: 39.

Задания для самостоятельного решения

27. Отрезки AH и CM – высоты остроугольного треугольника ABC, $AC = 27$, $BM = 8$, $AM = BH = 4$. Найдите периметр четырехугольника $AMHC$.

28. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CH. Найдите MH, если $AC = 16$, $\angle B = 60°$.

29. Через середину O гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к гипотенузе и пересекающая катет AC в точке M. Найдите площадь треугольника AMO, если $AM = 25$ и $MC = 7$.

30. В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 5$, $CA = 7$. Точка K лежит на луче BC, причем $\angle BAK = \angle ACB$. Найдите периметр треугольника ACK.

31. Меньший катет прямоугольного треугольника ABC равен 9, высота BK делит гипотенузу AC в отношении 3:4. Найдите площадь треугольника ABC.

32. Отрезок CH – высота прямоугольного треугольника ABC. Площади треугольников ACH и BCH равны 4 и 6 соответственно. Найдите длину гипотенузы AB.

33. В треугольнике ABC проведена биссектриса AO. Прямая, проходящая через точку O и параллельная прямой AC, пересекает сторону AB в точке M. Площадь треугольника ABC равна 6, $AB = 4$, $AC = 6$. Найдите площадь треугольника AOM.

34. В треугольнике ABC $AB = 36$, $BC = 27$, $\sin A = 0{,}375\sqrt{2}$. Найдите градусную меру угла C.

35. Отрезки AP, CH – высоты треугольника ABC, $\angle B = 135°$, $AC = 4\sqrt{2}$. Найдите длину отрезка PH.

36. Высота треугольника равна 2 и делит угол треугольника в отношении 1 : 2, а противолежащую ему сторону на части, меньшая из которых равна 1. Найдите площадь треугольника.

37. В треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$, медианы AM и CP взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABM.

38. В треугольнике ABC медиана AM и биссектриса BT взаимно перпендикулярны. Найдите меньшую сторону треугольника, если $AM = BT = 4$.

39. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса AT и медиана AM. Найдите площадь треугольника AMT, если $\angle C = 30°$, $AC = 2$.

40. Медиана AM и биссектриса BT треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABO, если $AB = 6$, $BC = 4$, $\angle ABC = 60°$.

Многоугольники

Тема «Многоугольники» в контрольных измерительных материалах представлена, прежде всего, задачами о параллелограмме (и его частных видах: ромбе, прямоугольнике и квадрате), а также задачами о трапеции. Свойства четырёхугольника зависят от его вида.

Произвольный выпуклый четырёхугольник обладает небольшим количеством свойств:

1) Его диагонали пересекаются, причём, внутри четырёхугольника.
2) Сумма углов четырёхугольника равна 360°.
3) Площадь произвольного четырёхугольника можно вычислить по формуле
$$S = 0,5\, d_1 d_2 \sin\alpha,$$

где d_1 и d_2 – длины диагоналей, α – угол между прямыми, содержащими диагонали четырехугольника. (Имеется ввиду один из четырех углов, образованных пересекающимися прямыми, величина которого не больше величин остальных трёх углов).

В частности, если диагонали взаимно перпендикулярны, то формула принимает вид $S = 0,5\, d_1 d_2$.

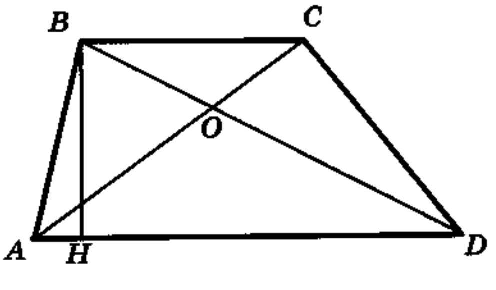
Если две стороны четырёхугольника сделать параллельными (они будут называться основаниями, а две другие – боковыми сторонами), получим **трапецию**. Наряду с тремя перечисленными свойствами четырёхугольника она обладает также следующими свойствами:

4) Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°.
5) Биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, взаимно перпендикулярны.
6) Отрезок, соединяющий середины боковых сторон (средняя линия трапеции), параллелен основаниям, а его длина равна полусумме длин оснований.
7) Если боковые стороны равны (такая трапеция называется равнобокой или равнобедренной), то углы, прилежащие к одному основанию, равны, равны и диагонали трапеции.
8) Площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту, т.е. полусуммы оснований на высоту.

Есть ещё два важных свойства трапеции.

Проведём в трапеции *ABCD* диагонали *AC* и *BD*.

Тогда:



9) Площади треугольников *BAD* и *CAD* равны (у них общее основание и равные высоты). Равны также и площади треугольников *BAC* и *BDC*.

Вычитая из площадей треугольников *BAD* и *CAD* площадь их общей части – треугольника *AOD*, получаем:

10) $S_{BAO} = S_{CDO}$.

Если противоположные стороны четырёхугольника попарно параллельны, то он называется **параллелограммом**. Параллелограмм обладает всеми свойствами трапеции. Но имеет и свои специфические свойства:

11) Диагонали точкой пересечения делятся пополам.
12) Противоположные стороны попарно равны.
13) Противолежащие углы попарно равны.
14) Сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180°.
15) Диагонали делят параллелограмм на четыре равных по площади треугольника.

Если учесть, что средняя линия параллелограмма (отрезок, соединяющий середины противоположных сторон) равна стороне, которой параллельна, то площадь параллелограмма равна произведению стороны и проведённой к ней высоты:

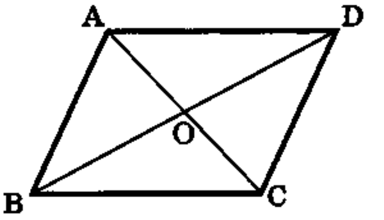
16) $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.
17) Кроме того, площадь можно вычислить, умножив произведение двух сторон на синус угла между ними:
$$S = ab\sin\varphi.$$

К перечисленным утверждениям следует добавить еще одно полезное свойство параллелограмма:

18) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Т.е. в параллелограмме $ABCD$

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2).$$



Эту формулу легко получить, применив теорему косинусов к треугольникам ABC и BCD, а затем сложив почленно полученные равенства.

Если один из углов параллелограмма прямой, то и остальные углы тоже прямые. Такой параллелограмм называется **прямоугольником**. Значит, прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Но у него есть и собственное свойство:

19) Диагонали прямоугольника равны.

20) Упрощается и вычисление площади: площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон.

Если две смежные стороны параллелограмма равны, то равны все его стороны. Такой параллелограмм называется **ромбом**. Значит, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма, но у него есть и свои специфические свойства:

21) Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

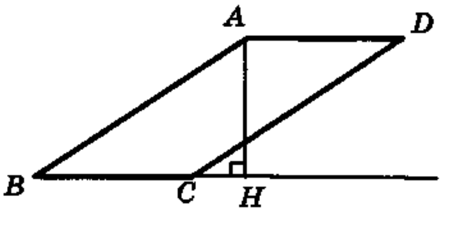
22) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Поскольку ромб является четырёхугольником, диагонали которого взаимно перпендикулярны, его площадь можно найти как половину произведения диагоналей. Т.е. для ромба $ABCD$ получаем формулу: $S = 0{,}5AC \cdot BD$.

Прямоугольник, являющийся ромбом (ромб, являющийся прямоугольником), называется **квадратом**. Следовательно, квадрат обладает всеми перечисленными выше свойствами. А площадь квадрата равна квадрату стороны: $S = a^2$.

Рассмотрим примеры решений задач.

Пример 18. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $BC = 8$, $\angle B = 30°$, а высота, проведенная из вершины A, равна 7.



Решение. В прямоугольном треугольнике ABH $\angle B = 30°$, $AH = 7$, значит, $AB = 2AH = 14$. Следовательно, периметр параллелограмма $ABCD$ равен $2(14 + 8) = 44$.

Ответ: 44.

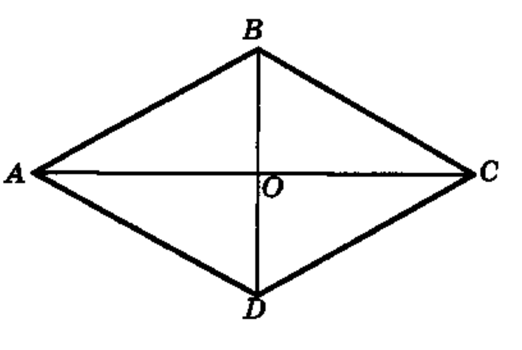
Пример 19. Периметр ромба равен 64, один из его углов 120°. Найдите меньшую диагональ ромба.

Решение. Все стороны ромба равны, поэтому $AB = 64 : 4 = 16$.

Диагонали ромба делят его углы пополам, поэтому $\angle ABO = 60°$.

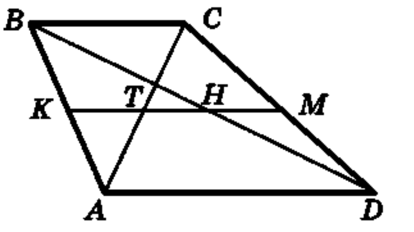
В прямоугольном треугольнике AOB $\angle BAO = 90° - 60° = 30°$, поэтому $BO = 0{,}5AB = 8$, $BD = 2BO = 16$.

Ответ: 16



Замечание. Искомый отрезок можно найти как сторону равнобедренного треугольника ABD с углом 60°: такой треугольник является равносторонним, поэтому $BD = AB = 16$.

Пример 20. Основания трапеции равны 8 и 10. Найдите расстояние между серединами её диагоналей.



Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, а её средняя линия KM пересекает диагонали AC и BD в точках T и H. Поскольку $KM \parallel AD$, то по теореме Фалеса, прямая KM пересекает диагонали AC и BD в их серединах. Значит, отрезки KT и MH – средние линии треугольников ABC и DBC.

Поэтому $KT = MH = \frac{1}{2}BC = 4$.

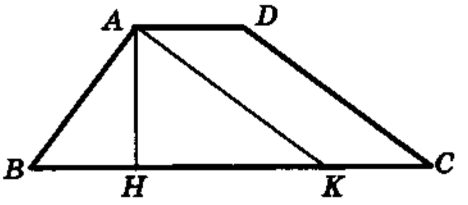
Следовательно, $TH = KM - 2KT = \frac{8+10}{2} - 2 \cdot 4 = \frac{10-8}{2} = 1$.

Ответ: 1.

Замечание. Фактически мы получили формулу расстояния между серединами диагоналей трапеции с основаниями a и b: $TH = \frac{|a-b|}{2}$.

В решении геометрических задач важную роль играют удачные дополнительные построения. Например, в трапеции нередко полезно бывает провести прямую, параллельную диагонали или боковой стороне.

Пример 21. В трапеции $ABCD$ $AB = 6$, $AD = 5$, $CD = 8$, $\angle B + \angle C = 90°$. Найдите площадь трапеции.



Решение. Через точку A проведем прямую, параллельную прямой CD, и обозначим точку ее пересечения с прямой BC буквой K. Стороны четырехугольника $AKCD$ попарно параллельны, следовательно, он – параллелограмм. Поэтому $AK = CD = 8$ и $KC = AD = 5$.

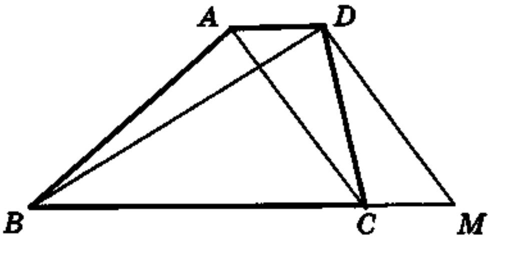
Итак, треугольник ABK прямоугольный с катетами, равными 6 и 8. Поэтому $BK = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Найдем высоту AH треугольника: $AH \cdot BK = AB \cdot AK$, значит, $AH = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$.

Поскольку $BC = BK + KC = 10 + 5 = 15$, то площадь трапеции равна $0{,}5 \cdot (15 + 5) \cdot 4{,}8 = 48$.

Ответ: 48.

Пример 22. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 8 и 15. Найдите среднюю линию трапеции.



Решение. Через вершину D трапеции $ABCD$ проведем прямую, параллельную прямой AC, и обозначим точку ее пересечения с прямой BC буквой M. Стороны четырехугольника $ACMD$ попарно параллельны, следовательно, это – параллелограмм. Поэтому $CM = AD$ и $AC = MD = 8$.

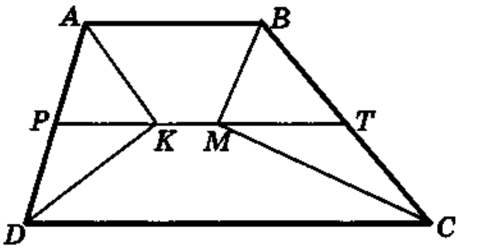
Следовательно, $BM = BC + CM = BC + AD$, а треугольник BDM прямоугольный с катетами, равными 15 и 8. Значит, $BM = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$.

Средняя линия трапеции равна $0{,}5(BC + AD) = 0{,}5(BC + CM) = 0{,}5BM$.

Следовательно, $0{,}5 \cdot 17 = 8{,}5$.

Ответ: 8,5.

Пример 23. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 10, $AD = 3$, $BC = 7$. Биссектрисы углов A и D пересекаются в точке K, биссектрисы углов B и C – в точке M. Найдите KM.



Решение. Луч AK – биссектриса угла A, следовательно, точка K равноудалена от его сторон AB и AD. Аналогично точка K равноудалена от сторон DA и DC. Значит, точка K равноудалена от оснований трапеции AB и CD. Аналогично доказывается, что и точка M равноудалена от оснований трапеции. Отсюда следует, что прямая KM параллельна прямым, содержащим основания трапеции и равноудалена от них.

Пусть прямая KM пересекает боковые стороны AD и BC в точках P и T соответственно, тогда PT – средняя линия трапеции, и поэтому

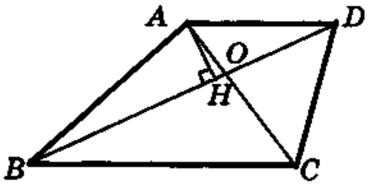
$$PT = 0,5(AB + CD) = 7,5.$$

Т.к. AK и DK – биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, $AK \perp DK$. Тогда KP – медиана прямоугольного треугольника AKD, проведенная к его гипотенузе, поэтому $KP = 0,5AD = 1,5$. Аналогично $MT = 0,5BC = 3,5$.

Следовательно, $KM = PT - (KP + MT) = 7,5 - (1,5 + 3,5) = 2,5$.

Ответ: 2,5.

Как отмечалось выше, в параллелограмме равны площади всех четырех треугольников, на которые он делится диагоналями.



В трапеции соотношение между площадями таких треугольников сложнее. Треугольники AOD и COB подобны, поэтому

$$S_{AOD} : S_{COB} = AD^2 : BC^2 = AO^2 : CO^2 = DO^2 : BO^2.$$

Треугольники BOA и DOA имеют общую высоту AH, поэтому

$$S_{BOA} : S_{DOA} = BO : DO.$$

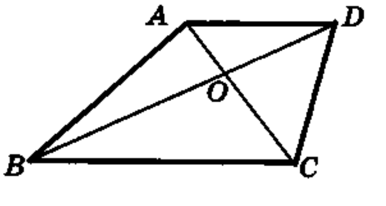
Аналогично доказывается, что

$$S_{AOB} : S_{COB} = AO : CO,$$
$$S_{AOD} : S_{COD} = AO : CO,$$
$$S_{BOC} : S_{DOC} = BO : DO.$$

Пример 24. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, основание AD трапеции равно 2, $BC = 3$, площадь треугольника AOB равна 6. Найдите площадь трапеции.

Решение. Так как

$$S_{AOB} : S_{AOD} = OB : OD = BC : AD,$$



получаем:

$$6 : S_{AOD} = 3 : 2,\ S_{AOD} = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4.$$

Аналогично,

$$S_{AOB} : S_{COB} = AO : CO = AD : BC.$$

Значит,

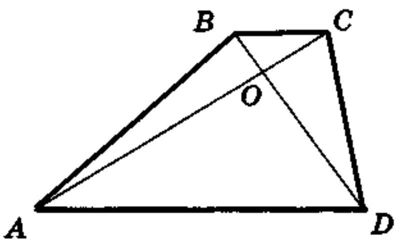
$$6 : S_{COB} = 2 : 3,\ S_{COB} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9.$$
$$S_{COD} = S_{AOB} = 6.$$

Итак, $S_{ABCD} = 6 + 4 + 6 + 9 = 25$.

Ответ: 25.

Пример 25. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны соответственно 16 и 36. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть $S_{BOC} = 16$, а $S_{AOD} = 36$. Треугольники BOC и AOD подобны (по двум углам), тогда $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA} = \frac{\sqrt{S_{BOC}}}{\sqrt{S_{AOD}}} = \frac{2}{3}$.



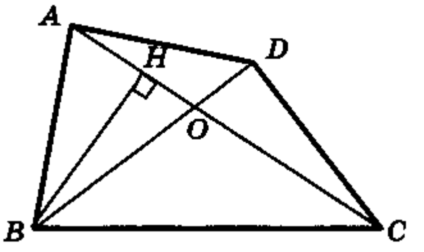
Треугольники AOB и BOC имеют общую высоту, значит, $\frac{S_{AOB}}{S_{OBC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{3}{2}$ и $S_{AOB} = \frac{3}{2} \cdot S_{OBC} = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$. Треугольники ABC и DBC равновелики, так как у них равные высоты и общее основание BC, следовательно, равновелики и треугольники AOB и DOC. Площадь трапеции равна 16 + 36 + 2·24 = 100.

Ответ: 100.

Пример 26. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, площади треугольников AOB и AOD равны соответственно 12 и 8, $AO : OC = 4 : 5$. Найдите площадь четырехугольника.

Решение. Треугольники AOB и BOC имеют общую высоту BH, следовательно,

$$S_{AOB} : S_{BOC} = AO : OC.$$



Отсюда получаем:

$$12 : S_{BOC} = 4 : 5, \quad S_{BOC} = \frac{12 \cdot 5}{4} = 15.$$

Аналогично

$$S_{AOD} : S_{COD} = AO : OC, \quad S_{COD} = \frac{8 \cdot 5}{4} = 10.$$

Итак,

$$S_{ABCD} = 8 + 12 + 15 + 10 = 45.$$

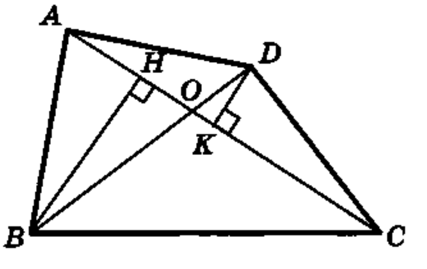
Ответ: 45.

Интересно, что если в произвольном выпуклом четырехугольнике провести диагонали, то произведения площадей треугольников, прилежащих к противоположным сторонам, будут равны, т.е. для любого четырехугольника $ABCD$ выполняется равенство:

$$S_{ABO} \cdot S_{CDO} = S_{ADO} \cdot S_{BCO},$$

где O – точка пересечения диагоналей.

(Докажите это самостоятельно, используя приведенный здесь чертёж.)



Пример 27. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOB, BOC и COD равны соответственно 4, 6 и 9. Найдите площадь четырехугольника.

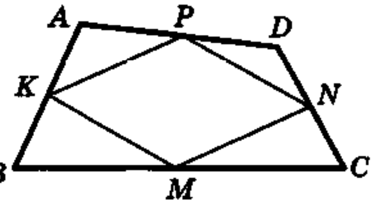
Решение. Поскольку $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$, получаем

$$S_{AOD} = \frac{S_{AOB} \cdot S_{COD}}{S_{BOC}} = \frac{4 \cdot 9}{6} = 6.$$

Следовательно, $S_{ABCD} = 4 + 6 + 9 + 6 = 25$.

Ответ: 25.

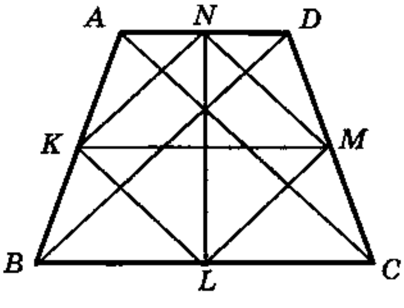
Еще один интересный геометрический факт получается, если последовательно соединить отрезками середины сторон произвольного четырехугольника. Построенный таким образом четырехугольник $KMNP$ является параллелограммом, т. к. его противоположные стороны попарно параллельны диагоналям AC и BD (почему?). Если $AC = BD$ (например, четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник или равнобедренная трапеция), то четырехугольник $KMNP$ – ромб (почему?). Если $AC \perp BD$ (например, четырехугольник $ABCD$ – ромб), то четырехугольник $KMNP$ – прямоугольник (почему?).



Пример 28. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 8. Найдите площадь трапеции.

Замечание. Наиболее простое решение основано на свойствах четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данной трапеции (как было показано выше, этот четырехугольник – параллелограмм).

Решение. Трапеция $ABCD$ равнобедренная, следовательно, $AC = BD$. Так как стороны параллелограмма $KLMN$ параллельны диагоналям трапеции и равны их половинам, параллелограмм является прямоугольником и ромбом, следовательно, это – квадрат.



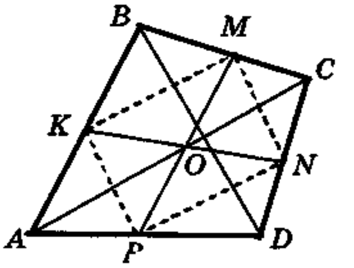
Диагональ KM квадрата является средней линией данной трапеции, следовательно, параллельна ее основаниям. Диагонали квадрата равны и взаимно перпендикулярны, следовательно, диагональ LN равна 8 и перпендикулярна основаниям трапеции, т. е. является ее высотой. Итак,

$$S_{ABCD} = 8 \cdot 8 = 64.$$

Ответ: 64.

Пример 29. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 8 и 6. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны друг другу. Найдите площадь четырехугольника.

Решение. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ равны 8 и 6 соответственно, точки K, M, N, P – середины его сторон. Тогда четырехугольник $KMNP$ – параллелограмм с равными диагоналями, то есть – прямоугольник. Стороны прямоугольника равны половинам диагоналей AC и BD (почему?), значит, его площадь равна 12. Стороны прямоугольника являются средними линиями треугольников ABC, BCD, ACD, ABD, следовательно,



$$S_{KBM} + S_{PDN} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ACD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

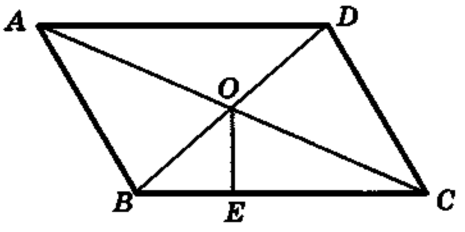
Аналогично можно доказать, что $S_{AKP} + S_{MCN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Значит, $S_{KMNP} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Отсюда получаем: $S_{ABCD} = 24$.

Ответ: 24.

Пример 30. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, $BD = 26$, $AC = 40$, $BC = 21$. Отрезок OE – перпендикуляр к стороне BC. Найдите разность площадей четырехугольников $DCEO$ и $ABEO$.



Решение. В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, $CO = 20$ и $BO = 13$. Пусть $BE = x$, тогда $EC = 21 - x$. В прямоугольных треугольниках OBE и OCE найдем OE^2. Получим уравнение $13^2 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2$, откуда $x = 5$.

Итак, $BE = 5$, $CE = 16$. Тогда в треугольнике OBE

$$OE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Значит,

$$S_{OBE} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30, \quad S_{OCE} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96.$$

$\Delta AOB = \Delta COD$, следовательно, $S_{AOB} = S_{COD}$.

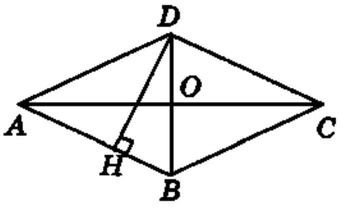
Поэтому $S_{DCEO} - S_{ABEO} = (S_{COD} + S_{OCE}) - (S_{AOB} + S_{OBE}) = S_{OCE} - S_{OBE} = 96 - 30 = 66$.

Ответ: 66.

Замечание. Отрезок OE можно было найти как высоту треугольника BOC, вычислив сначала по формуле Герона площадь этого треугольника.

Пример 31. Найдите площадь ромба, высота которого равна 4,8, а отношение диагоналей равно 3:4.

Решение. Пусть $AC = 8x$ и $BD = 6x$. Тогда $AO = 4x$, $BO = 3x$.



В треугольнике ABO $AB = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x$.

$$S_{ABCD} = 0{,}5 AC \cdot BD = AB \cdot DH.$$

Следовательно, $0{,}5 \cdot 8x \cdot 6x = 5x \cdot 4{,}8$.

Отсюда получаем, что $x = 1$, и, значит,

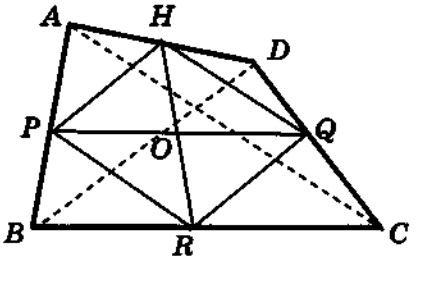
$$S_{ABCD} = 5 \cdot 4{,}8 = 24.$$

Ответ: 24.

Пример 32. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом 60°, а их длины относятся как 1 : 3. Найдите меньшую диагональ четырехугольника $ABCD$, если его большая диагональ равна $\sqrt{39}$.

Решение. Пусть P, H, Q и R – середины сторон AB, AD, DC и BC соответственно.

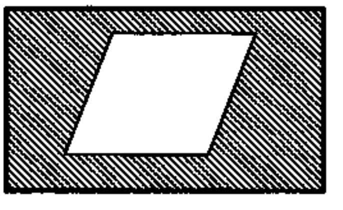
$PH \parallel BD$, так как PH средняя линия треугольника BAD. Аналогично докажем, что $HQ \parallel AC$, $RQ \parallel BD$ и $PR \parallel AC$, то есть $PHQR$ – параллелограмм. Пусть AC большая диагональ, равная $\sqrt{39}$, тогда $HQ = \frac{\sqrt{39}}{2}$ и $\angle HOQ = 120°$. Если OH примем за x, то OQ будет равен $3x$. В треугольнике HOQ по теореме косинусов $HQ^2 = OH^2 + OQ^2 - 2 \cdot OH \cdot OQ \cdot \cos 120°$ или $x^2 + 9x^2 + 3x^2 = \frac{39}{4}$, откуда $x^2 = \frac{3}{4}$. Применим теорему косинусов к треугольнику PHO: $PH^2 = x^2 + 9x^2 - 3x^2 = 7x^2 = \frac{21}{4}$, $BD = 2PH = \sqrt{21}$.



Ответ: $\sqrt{21}$.

Задания для самостоятельной работы

41. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 60, а отношение соседних сторон равно 4:11.
42. В прямоугольнике меньшая сторона равна 6 и вдвое меньше диагонали. Найдите периметр прямоугольника.
43. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 26 и одна сторона на 5 больше другой.
44. Периметр параллелограмма равен 49, одна из его сторон в 6 раз больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.
45. На продолжении стороны AD параллелограмма $ABCD$ за точку D отмечена точка K так, что $DC = DK$. Найдите больший угол параллелограмма $ABCD$, если $\angle DKC = 48°$.
46. Найдите величину острого угла C параллелограмма $ABCD$, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный 38°.
47. Стороны параллелограмма равны 6 и 8, а одна из диагоналей равна 10. Найдите длину другой диагонали.
48. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 30° и 45°. Найдите больший угол параллелограмма.
49. Стороны параллелограмма равны 21 и 56. Высота, проведенная к меньшей стороне, равна 48. Найдите высоту, опущенную на большую сторону.
50. В параллелограмме $ABCD$ $AB=13$, $AC=12$, $AD=5$. Найдите площадь параллелограмма.
51. Из параллелограмма со сторонами 18 и 9 и острым углом 30° вырезан квадрат со стороной 4. Найдите площадь оставшейся части фигуры.
52. Одну из сторон параллелограмма уменьшили в 10 раз, а проведенную к ней высоту уменьшили в 6 раз. Во сколько раз уменьшилась площадь параллелограмма?
53. Сторона ромба равна 26, а острый угол равен 60°. Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Найдите длины этих отрезков.
54. Диагонали ромба равны 14 и 48. Найдите его периметр.
55. Периметр ромба равен 86, а одна из диагоналей равна 28. Найдите длину второй диагонали ромба.
56. Диагональ ромба, лежащая против угла в 60°, равна 10. Найдите периметр ромба.
57. Диагонали прямоугольника равны 28, угол между ними равен 60°. Найдите меньшую сторону прямоугольника.
58. Из прямоугольника со сторонами 12 и 9 вырезан ромб с диагоналями 10 и 6. Найдите площадь оставшейся части фигуры.



59. Периметр ромба равен 72, а один из углов равен 60°. Найдите площадь ромба.
60. Периметр ромба равен 24, а синус одного из углов равен 1/3. Найдите площадь ромба.
61. Высота ромба равна 8, а его сторона равна 16. Найдите наибольший угол ромба.
62. Периметр равнобедренной трапеции равен 60. Ее боковая сторона равна меньшему основанию и в два раза меньше большего основания. Найдите среднюю линию трапеции.
63. Периметр равнобедренной трапеции равен 34, ее боковая сторона равна 8. Найдите среднюю линию трапеции.
64. Периметр равнобедренной трапеции равен 54, ее средняя линия равна 13. Найдите боковую сторону трапеции.
65. Тангенс острого угла прямоугольной трапеции равен $\frac{5}{7}$. Найдите её большее основание, если меньшее основание равно высоте и равно 16.
66. Найдите площадь трапеции, если её основания равны 16 и 10, а высота равна 4.

67. Основания трапеции равны 16 и 44, а боковые стороны – 17 и 25. Найдите площадь трапеции.
68. Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 20, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.
69. Основания трапеции равны 16 и 20, а одна из диагоналей равна 18. Найдите длину большего из отрезков, на которые делится эта диагональ точкой пересечения диагоналей.
70. Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 19, боковая сторона равна 13. Найдите площадь трапеции.
71. Найдите угол ABC равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной CD углы, равные 30° и 80° соответственно.
72. Биссектрисы углов A и B, прилежащих к боковой стороне трапеции $ABCD$, пересекаются в точке M. Найдите AM, если $AB=26$, $BM=24$.
73. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на отрезки 9 и 14. Найдите меньшее основание трапеции.
74. Основания трапеции равны 16 и 24. Найдите длины отрезков, на которые делит среднюю линию трапеции ее диагональ.
75. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали AC и BD пересекаются в точке K, $BK : KD=3 : 7$. Найдите площадь треугольника AKD, если площадь треугольника BKC равна 18.
76. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали AC и BD пересекаются в точке K, $BK : KD=2 : 5$. Найдите площадь треугольника AKD, если площадь треугольника BKC равна 8.
77. Величины углов выпуклого четырехугольника относятся как 1 : 4 : 3 : 2. Найдите больший угол четырехугольника. Ответ дайте в градусах.
78. Величины углов выпуклого четырехугольника относятся как 3 : 2 : 3 : 4. Найдите меньший угол четырехугольника. Ответ дайте в градусах.
79. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K так, что $BK : KC = 4 : 3$. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 132.
80. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на стороне AD. Площадь параллелограмма равна $36\sqrt{3}$, $\angle C = 120°$. Найдите большую сторону параллелограмма.
81. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$, $AD = 8$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, углов C и D – в точке M. Найдите KM.
82. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекают сторону BC в точках K и M соответственно, причем $BK = KM = MC$, $AK = 8$, $DM = 6$. Найдите периметр параллелограмма.
83. Биссектрисы углов A и C параллелограмма $ABCD$ пересекают стороны BC и AD в точках K и P соответственно, причем $BC : KC = 5 : 2$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 75. Найдите площадь четырехугольника $AKCP$.
84. Площадь ромба равна 600, а отношение длин диагоналей равно 4 : 3. Найдите высоту ромба.
85. Найдите высоту ромба, если его меньшая диагональ равна 6, а сторона равна 5.
86. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K и M так, что $AK = KM = MB$. Прямые CM и DK пересекаются в точке O. Площадь параллелограмма равна 40. Найдите площадь треугольника COD.
87. Точка M – середина боковой стороны BC трапеции $ABCD$. Площадь треугольника AMD равна 8. Найдите площадь трапеции.
88. Сторона параллелограмма равна 21, а диагонали равны 34 и 20. Найдите площадь параллелограмма.
89. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, основания BC и AD равны 3 и 4, а площадь равна 98. Найдите площадь треугольника AOB.
90. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны 3 и 6, диагонали пересекаются в точке O, сумма площадей треугольников AOB и COD равна 40. Найдите высоту трапеции.
91. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O, $AO = 6$, $OC = 4$ и $BO : OD = 2 : 7$. Найдите площадь треугольника AOB.

92. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 52. Диагонали пересекаются в точке O, $AO : OC = 4 : 9$, $BO : OD = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника AOD.

93. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если площади треугольников ABC, BCD и AOD равны соответственно 34, 80 и 168.

94. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, а отрезок, соединяющий середину меньшего основания и середину боковой стороны равен 7. Найдите площадь трапеции.

95. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, одно из оснований равно 17, а площадь равна 81. Найдите второе основание трапеции.

96. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны и точкой пересечения делятся в отношении 3:4. Площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон трапеции равна 196. Найдите боковую сторону трапеции.

97. Боковые стороны трапеции равны 12 и 16, а содержащие их прямые взаимно перпендикулярны, площадь трапеции равна 144. Найдите среднюю линию трапеции.

98. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) основания равны 13 и 26, одна из боковых сторон равна 5, а $\angle C - \angle A = 90°$. Найдите площадь трапеции.

99. Найдите высоту трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны и равны 15 и 20.

100. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 13. Одна из диагоналей равна 10. Найдите другую диагональ.

101. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делит основание на отрезки длиной 20 и 5. Найдите площадь трапеции.

102. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O и равны 8 и 5. Найдите средиюю линию трапеции, если $\angle BOC = 60°$.

103. В равнобокой трапеции $ABCD$ точка O – середина меньшего основания BC, AO – биссектриса угла A. Найдите BC, если $OA = 20$, а высота трапеции равна 12.

104. Основания трапеции равны 4 и 6, а ее площадь равна 100. Найдите наибольшую из площадей треугольников, на которые делят трапецию ее диагонали.

105. В трапеции с основаниями 8 и 2 проведены диагонали. Найдите площадь треугольника, сторонами которого являются отрезки диагоналей и большее основание трапеции, если высота трапеции равна 7.

106. Диагонали трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$) пересекаются в точке O так, что $MO : OP = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника NPQ, если площадь трапеции равна 8.

107. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Известно, что $AD = 33$, $DC = 11$. Площадь трапеции $AEFD$ относится к площади трапеции $EFCB$ как 27 : 5. Найдите длину отрезка EF.

108. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Известно, что $AD = 24$, $BC = 8$. Площадь трапеции $AEFD$ относится к площади трапеции $EFCB$ как 21 : 11. Найдите длину отрезка EF.

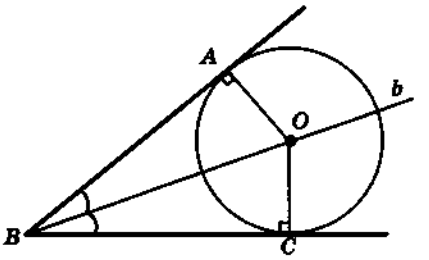
109. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Известно, что $AD = 66$, $BC = 22$. Площадь трапеции $EFCB$ относится к площади трапеции $AEFD$ как 5 : 27. Найдите длину отрезка EF.

110. Площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 16. Найдите площадь треугольника ACE.

111. Высота NA ромба $MNPQ$, проведенная к стороне MQ, пересекает диагональ MP в точке E. Известно, что $NA = 24$, $MA : AQ = 3 : 2$. Найдите ME.

Окружности

Во многих задачах встречается окружность, касающаяся сторон угла. Напомним, что в этом случае:

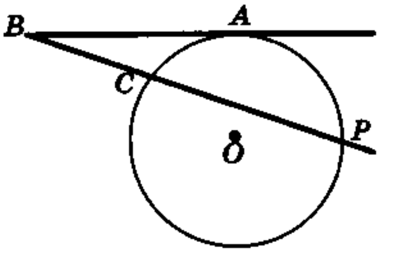


1) центр окружности лежит на биссектрисе угла $(O \in b)$;

2) отрезки, соединяющие точки касания с центром окружности, являются ее радиусами и перпендикулярны к сторонам угла ($OA = OC = r$, $OA \perp BA$, $OC \perp BC$);

3) равны расстояния от вершины угла до точек касания ($BA = BC$);

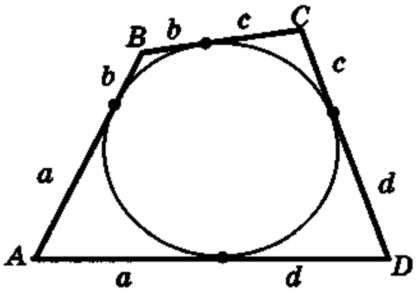
4) $\angle ABC + \angle AOC = 180°$.



Имеется взаимосвязь между отрезками касательной (BA) и секущей (BP):

$$BA^2 = BP \cdot BC.$$

Даже этот краткий перечень свойств позволяет решать большое количество разнообразных задач.



Во многих задачах рассматриваются окружности, вписанные в многоугольники. Их решение основано на следующих геометрических фактах.

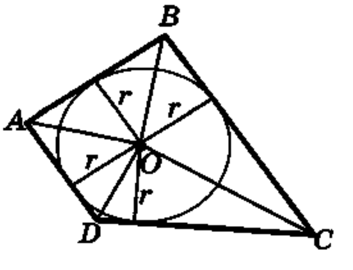
Если окружность вписана в четырехугольник, то четырехугольник называется описанным около окружности. Он обладает следующим важным свойством: суммы длин противолежащих сторон равны.

$$AB + CD = (a + b) + (c + d) = (a + d) + (b + c) = AD + BC.$$

Отсюда, например, следует, что:

1) параллелограмм, описанный около окружности, является ромбом (почему?);

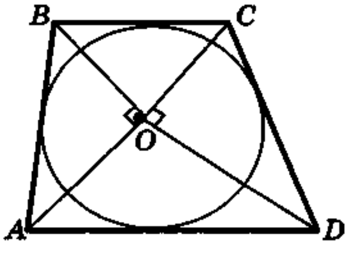
2) средняя линия трапеции, описанной около окружности, равна полусумме боковых сторон.



Более того,

3) в любом четырёхугольнике, описанном около окружности, суммы противоположных сторон равны;

4) его площадь равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности (см. рисунок).



Поскольку центр вписанной окружности лежит на биссектрисах углов четырехугольника, то:

5) центр окружности, вписанной в ромб, является точкой пересечения его диагоналей;

6) в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle AOB = \angle COD = 90°$ (почему?).

Следует помнить, что центр окружности, вписанной в трапецию, не совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции.

И еще одно важное свойство ромба и трапеции, описанных около окружности:

7) диаметр окружности является высотой ромба (трапеции).

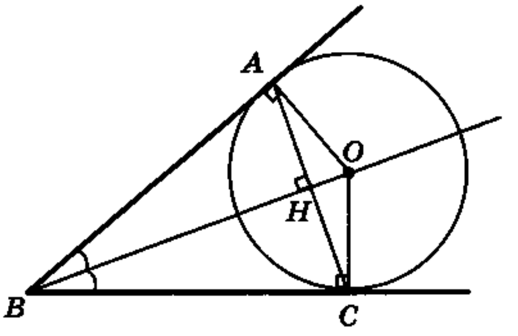
Если окружность вписана в треугольник или четырехугольник, то она касается сторон всех его углов, поэтому на основе перечисленных выше свойств окружности, вписанной в угол, получаем:

8) центр окружности является точкой пересечения биссектрис углов треугольника (четырехугольника);

9) радиусы, проведенные в точки касания, перпендикулярны к сторонам (четырехугольника);

10) равны расстояния от вершины угла до точек касания с его сторонами.

Пример 33. Окружность с центром O касается сторон угла B в точках A и C. Радиус окружности равен 7, $BO = 25$. Найдите AC.



Решение. Т.к. $OA \perp BA$, то в треугольнике ABO

$$AB = \sqrt{BO^2 - OA^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Тогда $BC = BA = 24$.

В треугольнике ABC отрезок BH – биссектриса и $BA = BC$, следовательно, $BH \perp AC$ и $AH = CH$.

Найдем высоту AH прямоугольного треугольника ABO: $AH \cdot BO = BA \cdot OA$.

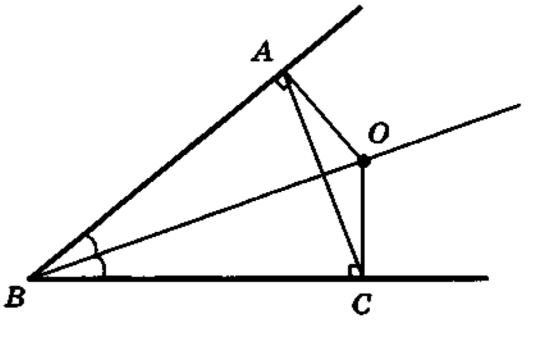
Значит, $AH = \dfrac{7 \cdot 24}{25} = 6{,}72$.

Тогда $AC = 2AH = 13{,}44$.

Ответ: 13,44.

Пример 34. Окружность с центром O касается сторон угла B в точках A и C. Радиус окружности равен 6, $BO = 2AO$. Найдите площадь треугольника AOC.

Решение. Прежде всего, отметим, что на чертеже к данной задаче совсем необязательно изображать окружность, поскольку важно представлять лишь взаимное расположение отрезков и точек.



В прямоугольном треугольнике ABO $BO = 2AO$, следовательно, $\angle ABO = 30°$. Отсюда получаем:

$$\angle ABC = 2\angle ABO = 60°$$

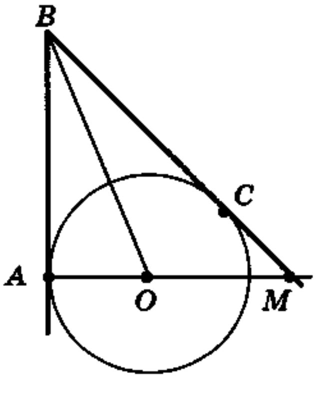
и

$$\angle AOC = 180° - 60° = 120°$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot CO \cdot \sin AOC = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}.$$

Ответ: $9\sqrt{3}$.

Пример 35. Окружность с центром O касается сторон угла B в точках A и C. Лучи AO и BC пересекаются в точке M, $OM = 9$, $BM = 18$. Найдите площадь треугольника BOM.



Решение. Отрезок BO – биссектриса треугольника ABM, следовательно,

$$BA : AO = BM : MO = 18 : 9 = 2 : 1.$$

Пусть $AO = x$, тогда $AB = 2x$, и в прямоугольном треугольнике ABM получаем $18^2 = (x+9)^2 + (2x)^2$.

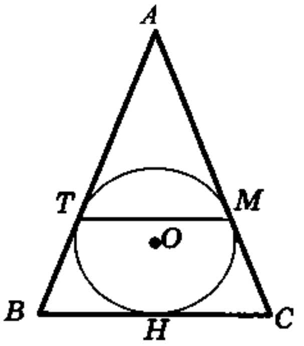
Далее получаем: $5x^2 + 18x - 243 = 0$.

Положительный корень уравнения равен 5,4. Следовательно, $AO = 5{,}4$, $BA = 10{,}8$.

$$S_{BOM} = \frac{1}{2} BA \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 10{,}8 \cdot 9 = 48{,}6.$$

Ответ: 48,6.

Пример 36. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AB и AC в точках T и M соответственно. Найдите TM, если $AB = 25$, $BC = 14$.



Решение. Данная окружность касается сторон угла A в точках T и M, следовательно, $AT = AM$.

Тогда

$$BT = AB - AT = AC - AM = MC.$$

Пусть окружность касается стороны BC в точке H. Тогда $BT = BH$ и $CM = CH$. Следовательно,

$$BH = BT = CM = CH = 14 : 2 = 7$$

и

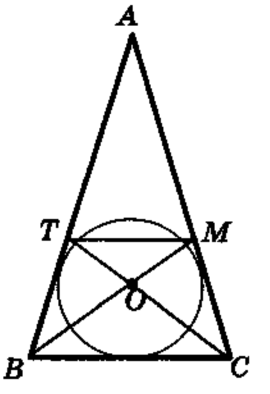
$$AT = AM = 25 - 7 = 18.$$

Т.к. равнобедренные треугольники ATM и ABC подобны (почему?), имеем: $\frac{TM}{BC} = \frac{AT}{AB}$.

Следовательно, $TM = \frac{AT \cdot BC}{AB} = \frac{18 \cdot 14}{25} = 10{,}08$.

Ответ: 10,08.

Пример 37. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках M и T соответственно. Найдите MT, если $AB = AC = 10$, $BC = 6$.



Решение. Луч BM – биссектриса угла B, значит,

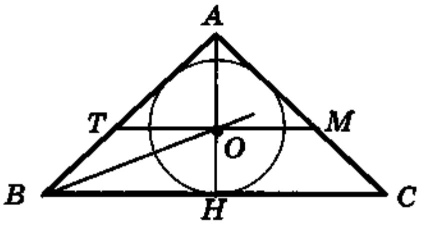
$$AM : CM = AB : CB = 5 : 3.$$

Пусть $AM = 5x$, тогда $CM = 3x$. $AM + CM = AC$. Следовательно, $x = \frac{5}{4}$.

Треугольники ATM и ABC подобны (почему?), следовательно, $\frac{TM}{BC} = \frac{AM}{AC}$, т.е. $TM = \frac{6 \cdot 25}{10 \cdot 4} = 3{,}75$.

Ответ: 3,75.

Пример 38. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Прямая, проходящая через точку O параллельно прямой BC, пересекает стороны AC и AB в точках M и T соответственно. Найдите MT, если $AB = AC = 10$, $BC = 16$.



Решение. Пусть луч AO пересекает сторону BC в точке H, тогда отрезок AH – биссектриса треугольника ABC.

По условию $AB = AC$, следовательно, $BH = HC = 8$.

Луч BO – биссектриса угла B, а значит, и биссектриса треугольника ABH, поэтому $AO : OH = AB : BH = 5 : 4$.

Пусть $AO = 5x$, тогда $OH = 4x$.

Следовательно, $AH = 9x$.

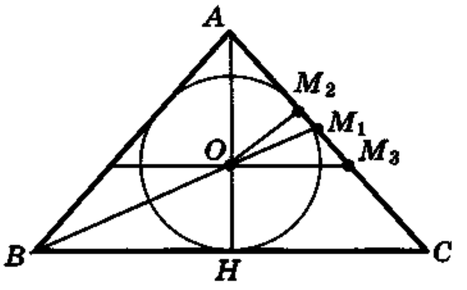
Треугольники ATO и ABH подобны (почему?), следовательно, $\frac{TO}{BH} = \frac{AO}{AH} = \frac{5}{9}$.

Отсюда получаем: $TO = \frac{8 \cdot 5}{9} = \frac{40}{9}$.

Значит, $TM = \frac{80}{9} = 8\frac{8}{9}$.

Ответ: $8\frac{8}{9}$.

Эту задачу, как и многие геометрические задачи, можно решить несколькими способами. Например, для вычисления отрезка AO можно использовать формулы $S = pr$ и $S = ah$, где S – площадь треугольника ABC, p – его полупериметр, r – радиус вписанной окружности, h – высота треугольника, a – сторона, к которой проведена высота h.



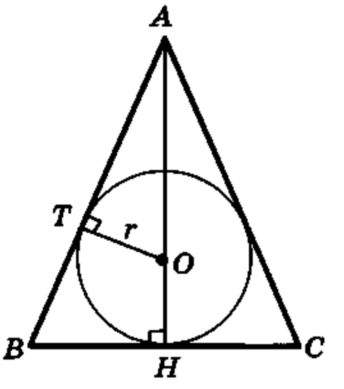
Замечание. Возвращаясь к чертежам примеров 36, 37 и 38, отметим, что на каждом из них точка M располагается иначе, чем в других задачах. Особенно важно помнить, что в общем случае точка (M_1) пересечения стороны с биссектрисой треугольника и точка (M_2) касания стороны с вписанной окружностью не совпадают. Их совпадение возможно только на основании равнобедренного треугольника (точка H).

Еще одно интересное соотношение для радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, легко получить, применяя подобие.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Центр окружности лежит на биссектрисе AH, являющейся также высотой и медианой треугольника. Прямоугольные треугольники AOT и ABH подобны (почему?), следовательно, $TO : BH = AT : AH$.

Из пропорции получаем $r = \dfrac{BH \cdot AT}{AH}$.

Аналогично получается формула $r = \dfrac{BH \cdot AO}{AB}$.



Пример 39. Окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковой стороны AB в точке T, $OT = 10$, $AT : BT = 8 : 5$. Найдите основание BC треугольника.

Решение. Построим высоту AH данного треугольника. Поскольку она является и биссектрисой, $O \in AH$, и точка H является точкой касания окружности и основания BC.

Пусть $AT = 8x$, тогда $BT = 5x$ и $BH = BT = 5x$.

В прямоугольном треугольнике ABH

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x.$$

Из подобия треугольников ABH и AOT получаем:

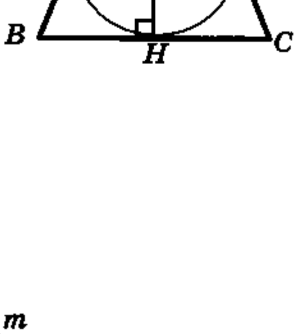
$$BH = \frac{AH \cdot OT}{AT},$$

т.е.

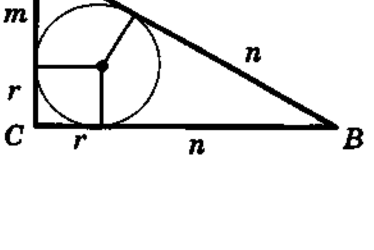
$$BH = \frac{12x \cdot 10}{8x} = 15.$$

Следовательно, $BC = 2BH = 30$.

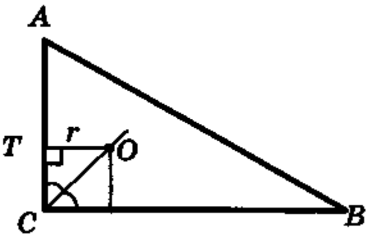
Ответ: 30.



Длина гипотенузы (c) и полупериметр (p) прямоугольного треугольника связаны с радиусом (r) вписанной в него окружности следующей простой формулой: $r + c = p$



Пример 40. Расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра вписанной в треугольник окружности равно $2\sqrt{2}$, а площадь треугольника равна 30. Найдите длину гипотенузы.



Решение. Поскольку центр вписанной в данный треугольник окружности лежит на биссектрисе прямого угла, $\angle ACO = 45°$.

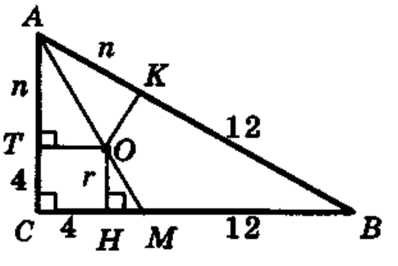
Следовательно,

$TO = r = CO : \sqrt{2} = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} = 2$.

Тогда $p = \dfrac{S}{r} = \dfrac{30}{2} = 15$, $c = p - r = 15 - 2 = 13$.

Ответ: 13.

Пример 41. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), касается катета BC в точке H. Биссектриса угла A пересекает катет BC в точке M. Найдите HM, если $CH = 4$, $BH = 12$.



Решение. Пусть точка O – центр окружности, вписанной в данный треугольник ABC. Тогда $O \in AM$, $OH \perp BC$.

Пусть окружность касается гипотенузы в точке K.

Тогда $AT = AK = n$, $BK = BH = 12$, $CT = CH = 4$.

По теореме Пифагора получаем:

$$(n+12)^2 - (n+4)^2 = 16^2.$$

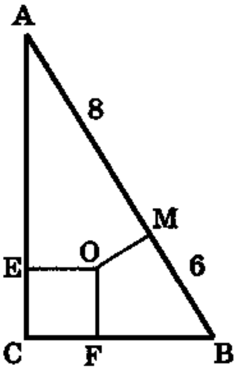
Отсюда $n = 8$.

Прямоугольные треугольники OMH и AOT подобны (почему?), следовательно, $HM : OT = OH : AT$.

Отсюда получаем: $HM = \dfrac{OT \cdot OH}{AT} = \dfrac{4 \cdot 4}{8} = 2$.

Ответ: 2.

Пример 42. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки 6 и 8. Найдите площадь треугольника.



Решение. Пусть E, F, M – точки касания вписанной окружности сторон треугольника. Отрезки AE и AM равны, как касательные, проведенные из одной точки к окружности. Аналогично докажем, что $BM = BF$. Площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}(AE + r)(BF + r) = \frac{1}{2}(AM + r)(BM + r) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(AM \cdot BM + (AM + BM)r + r^2\right),$$

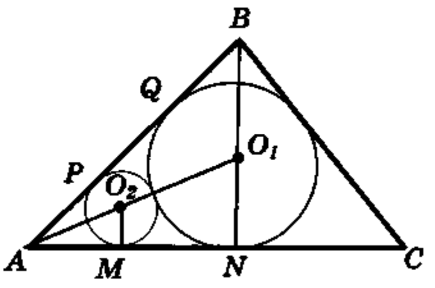
откуда

$2S = AM \cdot BM + r(AM + BM + r) = AM \cdot BM + r \cdot p = AM \cdot BM + S$,

то есть $S = AM \cdot BM = 48$.

Ответ: 48.

Пример 43. Стороны треугольника равны 20, 20 и 24. В треугольник вписана окружность. Вторая окружность касается первой, одной из меньших сторон и большей стороны треугольника. Найдите радиус второй окружности.



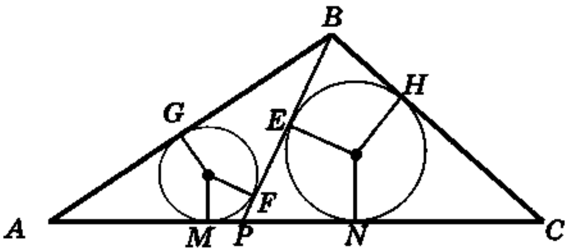
Решение. Пусть P и Q точки касания окружностей со стороной AB, а M и N – со стороной AC, а O_1, O_2 – центры этих окружностей. Зная стороны треугольника, найдем радиус вписанной в треугольник окружности.

Высота треугольника равна $BN = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$, тогда
$r = \frac{S}{p} = \frac{0,5 \cdot 16 \cdot 24}{32} = 6$.

Пусть $O_2M = x$. Из подобия треугольников AO_2M и AO_1N получим $\frac{x}{6} = \frac{AO_2}{AO_2 + x + 6}$.
Найдем AO_2. Центр вписанной в угол окружности лежит на его биссектрисе, AO_2 – биссектриса угла A, $\cos A = \frac{AN}{AB} = \frac{3}{5}$, тогда $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $AO_2 = \frac{x}{\sin\frac{A}{2}} = x\sqrt{5}$. Теперь можно найти искомый радиус: $O_2M = 3\left(3 - \sqrt{5}\right)$.

Ответ: $3\left(3 - \sqrt{5}\right)$.

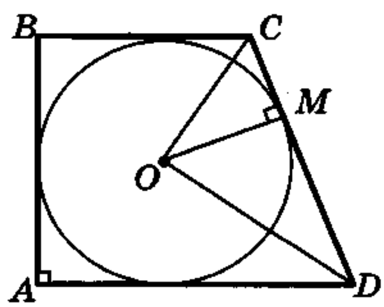
Пример 44. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка P. В треугольники ABP и PBC вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей отрезка BP, если точка P делит основание AC на отрезки $AP = 2$ и $PC = 8$.



Решение. Пусть G, M и F – точки касания окружностью сторон AB, AP и BP треугольника PAB соответственно, а E, H и N – точки касания сторон BP, BC и PC треугольника PBC. Касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны. Применим эту теорему к касательным, проведенным из вершин треугольника, учитывая, что $AB = BC$, получаем:
$EF = BF - BE = BG - BH = (BA - GA) - (BC - HC) = HC - GA = NC - AM = (CP - PN) - (AP - MP) = 6 - (PN - MP) = 6 - EF$, то есть $EF = 6 - EF$, откуда $EF = 3$.
Ответ: 3.

Пример 45. Площадь круга, вписанного в трапецию, равна 9π, а сумма боковых сторон трапеции равна 20. Найдите площадь трапеции.
Решение. По условию задачи
$$S_{кр} = \pi r^2 = 9\pi.$$
Следовательно, $r = 3$. Тогда диаметр круга, а значит, и высота трапеции, равна 6.
Средняя линия трапеции, описанной около круга, равна полусумме ее боковых сторон, т.е. равна 10.
Итак,
$$S_{тр} = 6 \cdot 10 = 60.$$
Ответ: 60.

Пример 46. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Расстояния от центра окружности до концов боковой стороны трапеции равны 6 и 8. Найдите площадь трапеции.



Решение. В треугольнике COD $\angle COD = 90°$ (свойство 4), поэтому
$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$
Пусть точка M – точка касания окружности и стороны CD. Тогда $OM = r$ и $OM \perp CD$. В прямоугольном треугольнике COD
$$OM \cdot CD = OC \cdot OD.$$
Значит, $OM = \frac{OC \cdot OD}{CD} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$.

Высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне, т.е. диаметру вписанной окружности. Следовательно,

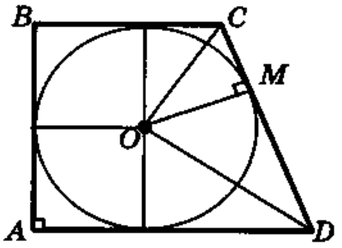
$$AB = h_{тр} = 2r = 9,6.$$

Тогда

$$S_{тр} = 9,6 \cdot \frac{9,6+10}{2} = 94,08.$$

Ответ: 94,08.

Замечание. У рассмотренной задачи есть еще одно наглядное решение.

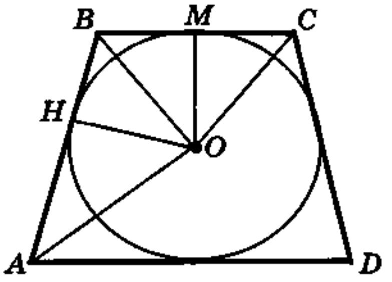


Данную трапецию можно разбить на два квадрата со стороной, равной радиусу вписанной окружности, и две пары равных треугольников.

Следовательно,

$$S_{тр} = 2 \cdot 4,8^2 + 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} = 2 \cdot 23,04 + 48 = 94,08.$$

Пример 47. Около окружности радиуса 3 описана равнобедренная трапеция, меньшее основание которой равно 8. Найдите площадь трапеции.



Решение. Соединим центр вписанной окружности с вершинами A, B и C трапеции и проведем радиусы OM и OH в точки касания окружности с меньшим основанием и боковой стороной. Треугольники OBH, OBM и OCM равны (почему?), следовательно, $BH = BM = CM = 4$.

В прямоугольном треугольнике OBH

$$OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = 5.$$

Треугольники AOB и OHB подобны (почему?), следовательно,

$$AB : OB = OB : BH,$$

поэтому

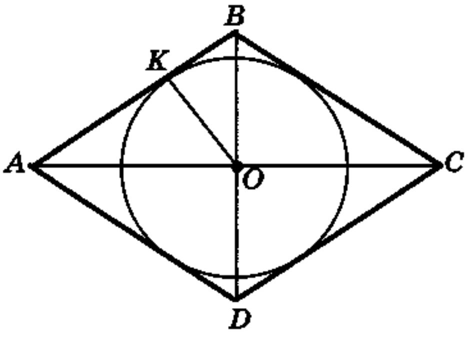
$$AB = 5^2 : 4 = 6,25.$$

По условию $AB = CD$, следовательно, средняя линия данной трапеции равна стороне AB, т.е. равна 6,25. Поэтому

$$S_{тр} = 6 \cdot 6,25 = 37,5.$$

Ответ: 37,5.

Пример 48. В ромб вписана окружность. Точка касания окружности и стороны ромба делит сторону в отношении 1 : 5. Площадь ромба равна $60\sqrt{5}$. Найдите радиус окружности.



Решение. Проведем радиус в точку касания K. Пусть $BK = x$, тогда по условию $AK = 5x$.

Следовательно, в прямоугольном треугольнике AOB

$$OK^2 = AK \cdot BK = 5x^2,$$

т.е. $OK = x\sqrt{5}$.

$$S_{ромба} = 4 \cdot \frac{AB \cdot OK}{2} = 2(x+5x)x\sqrt{5} = 60\sqrt{5}.$$

Отсюда получаем: $x = \sqrt{5}$.

Следовательно, $r = OK = 5$.

Ответ: 5.

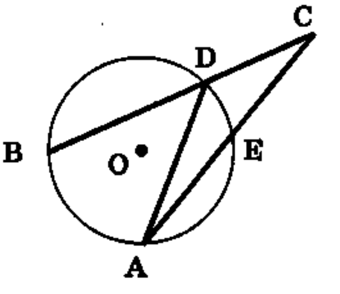
Задания для самостоятельного решения

112. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $32\sqrt{2}$. Радиус окружности равен 32.

113. Центральный угол на 47° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.

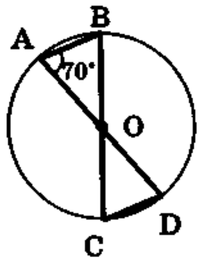
114. В окружности с центром O AC и BD — диаметры. Вписанный угол ACB равен 49°. Найдите центральный угол AOD.

115. Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 102° и 42°.

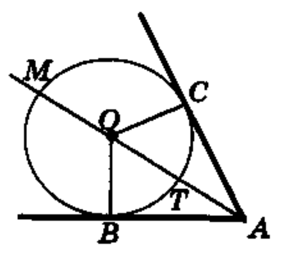


116. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO. Найдите радиус окружности, если $AB = 24$, $AO = 25$.

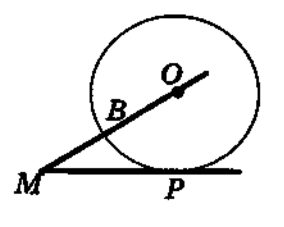
117. В окружности с центром в точке O проведены диаметры AD и BC, угол OAB равен 70°. Найдите величину угла OCD.



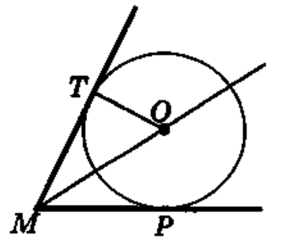
118. Окружность с центром P и прямая MT касаются в точке M. Найдите PT, если $TM = 4$, а диаметр окружности равен 6.



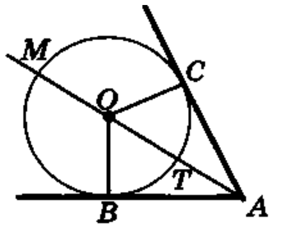
119. Окружность с центром O и прямая MP касаются в точке P. Найдите BM, если радиус окружности равен 3, а $PM = 4$.



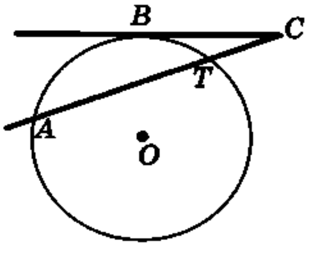
120. Прямые MT и MP касаются окружности с центром O в точках T и P, $\angle TMP = 60°$, $OT = 3$. Найдите OM.



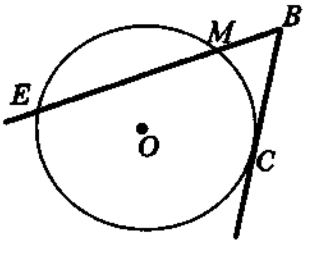
121. Стороны угла A касаются окружности с центром O в точках B и C, $\angle BOC = 120°$, $OM = 2$. Найдите AT.



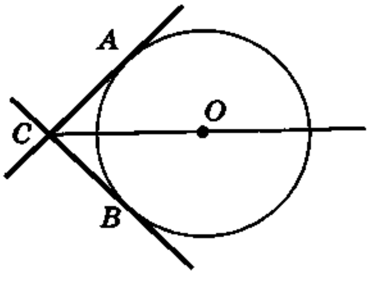
122. Прямая CB касается окружности с центром O в точке B, прямая CA – секущая, $CT = 4$, $CA = 9$. Найдите CB.



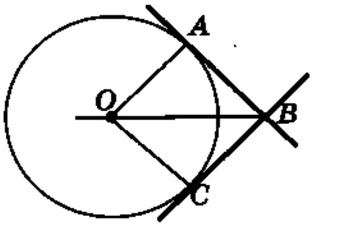
123. Прямая BC касается окружности с центром O в точке C, прямая BE – секущая, $BC = 6$, $ME = 5$. Найдите BM.



124. Прямые CA и CB касаются окружности с центром O в точках A и B, $\angle ACB=90°$, $CO=5\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности.



125. BA и BC – касательные к окружности с центром O, $\angle ABC=90°$, радиус окружности равен $6\sqrt{2}$. Найдите BO.



126. В треугольнике ABC $AB = BC = 8$, $AC = 6$. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AB в точке M. Найдите BM.

127. В треугольнике ABC $AB = BC = 12$, $AC = 10$. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны BC в точке T. Найдите BT.

128. Высота равностороннего треугольника равна 12. Найдите радиус вписанной в него окружности.

129. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 5. Найдите высоту треугольника.

130. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, K и P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $AP = 4$, $BM = 6$ и $CK = 3$.

131. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 9 и 4, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника.

132. Периметр квадрата равен 20. Найдите длину вписанной в него окружности.

133. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности радиуса 8.

134. Площадь прямоугольника равна 36 м^2. Найдите площадь вписанного в него круга.

135. Найдите высоту трапеции, в которую вписана окружность радиуса 13.

136. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Меньшая боковая сторона трапеции равна 4, а разность оснований равна 3. Найдите большую боковую сторону.

137. Найдите площадь прямоугольной трапеции с боковыми сторонами 10 и 16, если в неё можно вписать окружность.

138. Основания трапеции равны 8 и 18. В трапецию вписана окружность радиуса 6. Найдите площадь трапеции.

139. Основания трапеции равны 4 и 9. Площадь трапеции равна 39. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности.

140. В трапецию вписана окружность. Боковые стороны трапеции равны 7 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

141. Периметр ромба равен 104. Радиус вписанной в него окружности равен 12. Найдите площадь ромба.

142. Площадь ромба равна 78, а периметр равен 52. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.

143. Сторона ромба равна 12, острый угол равен 30°. Найдите радиус вписанной окружности этого ромба.

144. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность. Периметр четырёхугольника равен 36. Найдите сумму сторон BC и AD.

145. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 12$, $CD = 18$. Найдите периметр четырехугольника.

146. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 8$, $BC = 9$ и $CD = 13$. Найдите четвертую сторону четырехугольника.

147. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите расстояние от центра вписанной окружности до вершины меньшего угла.

148. В равнобедренную трапецию с боковой стороной 13 и высотой 12 вписана окружность. Найдите диагональ трапеции.

149. Через точку окружности радиуса 10 проведены две взаимно перпендикулярные хорды длиной 16 и 12. Найдите расстояние между серединами хорд.

150. Основание равнобедренного треугольника вдвое меньше его боковой стороны, а высота, проведенная к основанию, равна 10. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

151. В ромб вписана окружность Точка касания делит сторону в отношении 1 : 3, площадь ромба равна $24\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности.

152. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания окружности с боковой стороной делит эту сторону на отрезки длиной 1 и 4. Найдите периметр трапеции.

153. В четырехугольник вписана окружность радиуса 1,6, а две его противолежащие стороны равны 3 и 5. Найдите площадь четырехугольника.

154. Отношение оснований равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равно 3. Найдите градусную меру меньшего угла трапеции.

155. В треугольник ABC вписана окружность с центром O, $\angle B = 60°$, $AO = 4$, $CO = 6$. Найдите радиус окружности.

156. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, BC и CA в точках T, M и K соответственно, при этом $AK = KC$, $\angle KMT = 75°$. Найдите периметр треугольника ABC, если произведение длин его сторон равно $9 + 6\sqrt{3}$.

157. Окружность с центром O касается диагонали AC и сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$. Расстояния от точки O до прямых AD и AC равны 8 и 6 соответственно, $OA = 10$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

158. Две окружности радиусов 2 и 3 касаются внешним образом в точке A. Их общая касательная, проходящая через точку A, пересекает две другие общие касательные в точках B и C. Найдите BC.

159. На стороне BC треугольника ABC взята точка E так, что $\angle CAE = 2\angle BAE$. Окружности радиусов 8 и 4, вписанные в треугольники ACE и ABE соответственно, касаются прямой BC в точках, расстояние между которыми равно $\sqrt{129}$. Найдите AE.

160. Хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M так, что $OM = 8$, $AM = 12$, $MB = 3$, DM на 16 больше, чем MC. Найдите радиус окружности.

161. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, и катета делит этот катет на отрезки 3 и 4, считая от вершины прямого угла. Найдите площадь треугольника.

162. Около окружности описана равнобедренная трапеция с углом 30°. Средняя линия трапеции равна 4. Найдите радиус окружности.

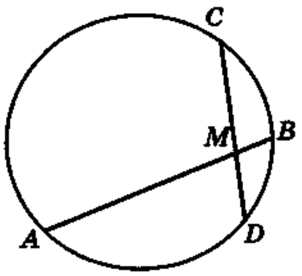
163. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин острых углов равны 3 и $\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности.

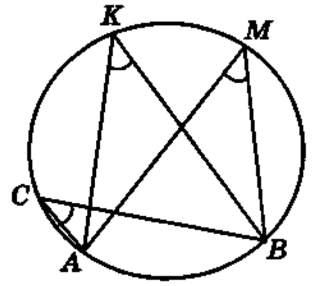
В курсе планиметрии рассматриваются также окружности, описанные около треугольника или четырехугольника. При решении задач по этой теме используются следующие факты:

1. Центр описанной окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (четырехугольника). Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника, лежит внутри него, прямоугольного – на гипотенузе (ее середина), тупоугольного – вне треугольника.

2. Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, то

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$





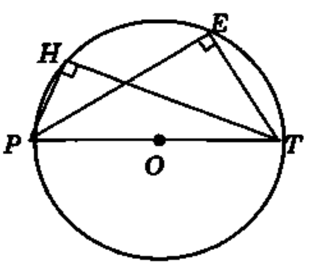
3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны:

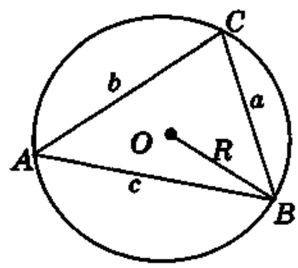
$$\angle ACB = \angle AKB = \angle AMB.$$

Их градусная мера равна половине градусной меры дуги, на которую они опираются.

4. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым:

$$\angle PHT = \angle PET = 90°.$$





5. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Из свойства 5 легко получается следующее свойство 6:

6. Три стороны и площадь треугольника ABC связаны с радиусом описанной около него окружности формулой

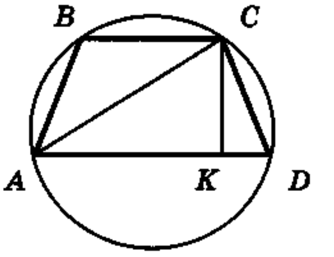
$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Действительно, из формулы $\frac{a}{\sin A} = 2R$ получаем: $\frac{a}{2R} = \sin A$. Умножив обе части последнего равенства на $\frac{1}{2}bc$, получаем: $\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}bc\sin A = S_{ABC}$.

7. Параллелограмм, вписанный в окружность, является прямоугольником, вписанная трапеция является равнобедренной.

Пример 49. В окружность радиуса 15 вписана трапеция. Диагональ трапеции равна 20, а высота равна 6. Найдите длину боковой стороны трапеции.

Решение. Так как трапеция вписана в окружность, она равнобедренная. Из треугольника ACK $\sin\angle CAK = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.



Применим теорему синусов к треугольнику ACD:

$$CD = 2R\cdot\sin\angle CAD = 2\cdot 15\cdot\frac{3}{10} = 9.$$

Ответ: 9.

Пример 50. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке M, $AM = 4$, $CM = 9$, $BM = DM$, $\angle AMB = 30^\circ$. Найдите площадь четырехугольника.

Решение. Так как $BM\cdot MD = AM\cdot MC$,

$$BM = DM = \sqrt{AM\cdot CM} = \sqrt{4\cdot 9} = 6.$$

Тогда $BD = 12$, $AC = 13$. По формуле $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$ получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}13\cdot 12\sin 30^\circ = 39.$$

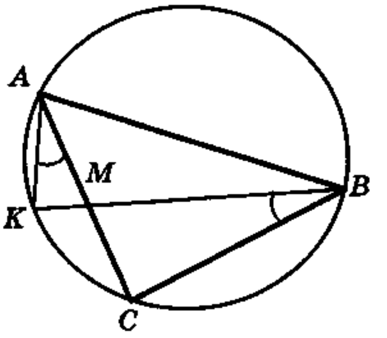
Ответ: 39.

Пример 51. Треугольник ABC вписан в окружность. Прямая, содержащая медиану BM, пересекает окружность в точке K, $KM = 4$, $BM = 9$, $BC = 7{,}2$. Найдите AK.

Решение. Так как BM – медиана треугольника ABC, используя свойство хорд окружности, получаем:

$$AM = \sqrt{KM\cdot MB} = \sqrt{4\cdot 9} = 6.$$

Вписанные углы KAC и KBC опираются на одну и ту же дугу, следовательно, равны. Аналогично $\angle AKB = \angle BCA$. Следовательно, треугольники AKM и BCM подобны (почему?).



Из подобия треугольников следует, что

$$AK : BC = KM : MC.$$

Отсюда получаем:

$$AK = \frac{7{,}2\cdot 4}{6} = 4{,}8.$$

Ответ: 4,8.

Пример 52. В треугольнике ABC $\angle C = 60^\circ$, $AB = 8$. На основании AB как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках K и M соответственно. Найдите KM.

Решение. Вписанные углы KAB и BMK опираются на дуги окружности, сумма мер которых равна 360°, следовательно,

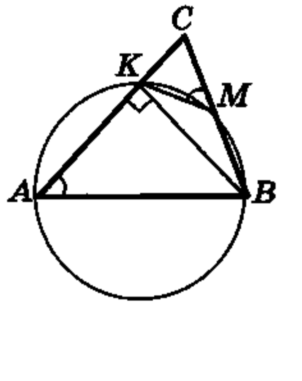
$$\angle KAB + \angle BMK = 180^\circ.$$

Поскольку и

$$\angle CMK + \angle BMK = 180^\circ,$$

получаем: $\angle CMK = \angle CAB$.

Следовательно, $\Delta MKC \sim \Delta ABC$ (по двум углам).



Из подобия треугольников получаем:

$$\frac{KM}{AB} = \frac{CK}{BC},$$

следовательно,

$$KM = \frac{CK}{BC}\cdot AB.$$

Вписанный угол AKB опирается на диаметр, следовательно, $\angle AKB = 90°$. Тогда и $\angle BKC = 90°$.

В прямоугольном треугольнике BCK $\angle C = 60°$, поэтому

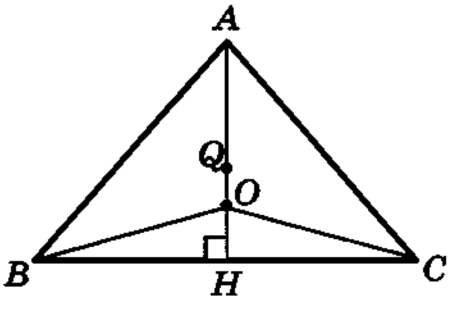
$$\frac{CK}{BC} = \cos C = \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $KM = \frac{1}{2}AB = 4$.

Ответ: 4.

Пример 53. Основание равнобедренного остроугольного треугольника равно 48, а радиус описанной около него окружности равен 25. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника.

Решение. Пусть треугольник ABC – данный остроугольный равнобедренный с основанием BC. Центр описанной окружности (точка O) лежит на серединном перпендикуляре к основанию BC, содержащем высоту треугольника. По условию треугольник остроугольный, значит, точка O лежит внутри треугольника, т.е. на высоте AH. При этом $OA = OB = OC = 25$ – радиусы описанной окружности. В прямоугольном треугольнике OBH



$$OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7.$$

Следовательно, $AH = 25 + 7 = 32$.

Радиус вписанной окружности найдем, используя полупериметр и площадь треугольника ABC:

$$AB = \sqrt{24^2 + 32^2} = 8\sqrt{3^2 + 4^2} = 40; \ p = 24 + 40 = 64;$$

$$S = 0{,}5BC \cdot AH = 24 \cdot 32; \ r = \frac{S}{p} = \frac{24 \cdot 32}{64} = 12.$$

Центр вписанной окружности (точка Q) также лежит на высоте AH, значит, $QH = 12$, поэтому точка Q лежит на отрезке AO.

Следовательно, $OQ = QH - OH = 12 - 7 = 5$.

Ответ: 5.

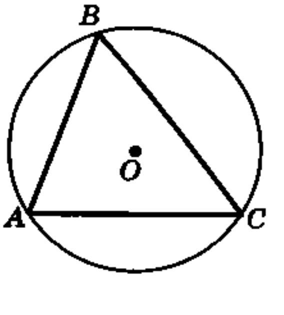
Пример 54. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 6. Найдите AC, если $AB = 2$, $BC = 3$.

Решение.

Пусть точка O – центр окружности. Тогда $OA + OC = 12 > AB + BC$. Значит, точка O не лежит на стороне AC, иначе будет нарушено неравенство треугольника.

Итак, следует рассмотреть два случая.

1. Точка O лежит внутри треугольника ABC.



По теореме синусов $\frac{c}{\sin C} = 2R$, откуда $\sin C = \frac{4}{2 \cdot 12} = \frac{1}{6}$.

Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\cos C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

(угол C острый, поэтому косинус положительный).

По теореме косинусов получаем:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C,$$

то есть $4^2 = 6^2 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{35}}{6}$.

Решая квадратное уравнение $x^2 - 2\sqrt{35}\,x + 20 = 0$, получаем

$$x = \sqrt{35} \pm \sqrt{15}.$$

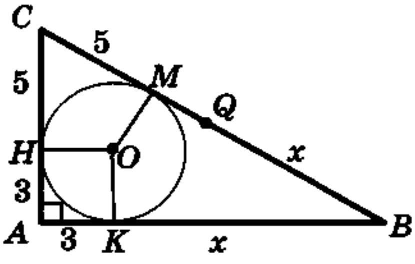
Поскольку оба корня положительны, $AC = \sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.

2. Точка O лежит вне треугольника ABC.

В этом случае угол B тупой, но угол C по-прежнему острый. Следовательно, получим те же значения длины AC.

Ответ: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.

Пример 55. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, и катета делит этот катет на отрезки длины 3 и 5. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.



Решение. Пусть окружность касается сторон треугольника в точках H, K, M. Радиус окружности, вписанной в данный треугольник, равен 3 (почему?).

Тогда $\angle B = 60°$, $BC = 3AB$, $AC = 8$, $AB = x + 3$, $BC = x + 5$.

По теореме Пифагора получаем:

$$8^2 + (x+3)^2 = (x+5)^2.$$

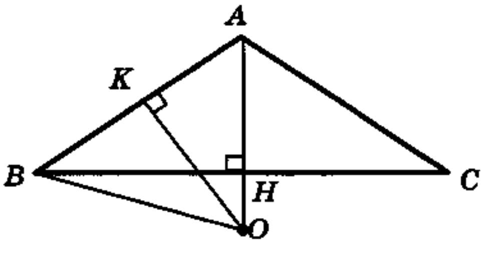
Значит, $x = 12$. Итак, $BC = 5 + 12 = 17$.

Центр Q описанной около прямоугольного треугольника окружности является серединой гипотенузы, следовательно, $R = 0{,}5BC = 8{,}5$.

Ответ: 8,5.

Пример 56. Около тупоугольного равнобедренного треугольника описана окружность радиусом 25. Расстояние от ее центра до основания треугольника равно 7. Найдите расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника.

Решение. Искомое расстояние – длина перпендикуляра OK, проведенного из точки O к стороне AB. Пусть AH – высота треугольника ABC. Тогда прямоугольные треугольники AOK и ABH подобны (почему?), следовательно,



$$\frac{KO}{BH} = \frac{AO}{AB}.$$

Найдем отрезки BH и AB.

Центр O окружности, описанной около тупоугольного равнобедренного треугольника ABC, лежит вне его на прямой AH, содержащей высоту треугольника. Поэтому

$$AH = AO - OH = 25 - 7 = 18.$$

В прямоугольном треугольнике OBH

$$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Тогда в треугольнике ABH

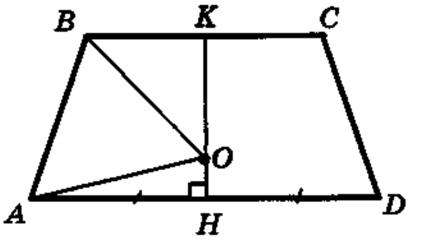
$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 6\sqrt{3^2 + 4^2} = 30.$$

Итак, $KO = \dfrac{AO \cdot BH}{AB} = \dfrac{25 \cdot 24}{30} = 20$.

Ответ: 20.

Замечание. Поскольку $AK = BK$ (почему?), отрезок OK можно было найти по теореме Пифагора как катет треугольника AOK.

Пример 57. Около трапеции описана окружность, центр которой лежит внутри трапеции. Высота трапеции равна 27, а основания равны 48 и 30. Найдите радиус окружности.



Решение. Трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной. Центр окружности – точка O – лежит внутри трапеции на серединном перпендикуляре к ее основаниям.

Пусть $OH = x$, тогда $OK = 27 - x$. Из прямоугольных треугольников AOH и BOK получаем:

$$AH^2 + OH^2 = BK^2 + OK^2,$$

т.е. $24^2 + x^2 = 15^2 + (27 - x)^2$.

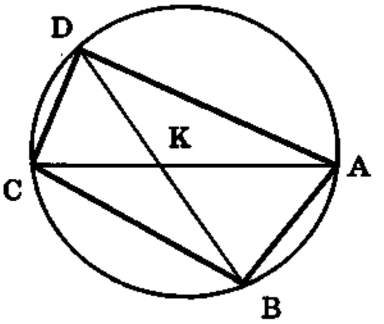
Отсюда $x = 7$.

Следовательно, $R = AO = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$.

Ответ: 25.

Пример 58. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность. Вершины четырехугольника делят длину окружности в отношении $AB : BC : CD : DA = 1 : 5 : 2 : 10$. Найдите площадь четырехугольника, если $AC = 5$, $BD = 10$.

Решение. Докажем, что отношение длин дуг равно отношению их градусных мер. Пусть l_1 и l_2 – длины дуг, α_1 и α_2 – их градусные меры.



Тогда $l_1 = \dfrac{\pi R \cdot \alpha_1}{180°}$, $l_2 = \dfrac{\pi R \cdot \alpha_2}{180°}$ и $l_1 : l_2 = \alpha_1 : \alpha_2$, значит, окружность разбивается в отношении 1 : 5 : 2 : 10.

Теперь можем найти градусные меры дуг AB и CD. Они равны соответственно $\dfrac{360°}{18} \cdot 1 = 20°$ и $\dfrac{360°}{18} \cdot 2 = 40°$.

Угол между диагоналями CKD является внешним углом треугольника ADK, значит,

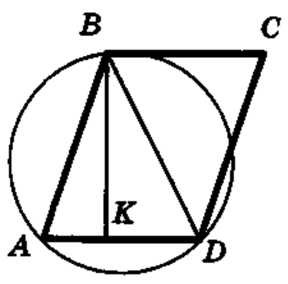
$$\angle CKD = \angle BDA + \angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 20° + \frac{1}{2} \cdot 40° = 30°.$$

Площадь четырехугольника равна $\dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle CKD = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 12{,}5$.

Ответ: 12,5.

Пример 59. В параллелограмме $ABCD$ $\angle C = 15°$, $BD = 8$. Окружность, описанная около треугольника ABD, касается прямой BC. Найдите площадь параллелограмма.

Решение. Пусть BK высота треугольника ABD. Так как $KB \perp BC$, а BC – касательная, центр окружности лежит на прямой BK, то есть диаметр окружности перпендикулярен хорде AD и делит ее пополам. Треугольник ABD равнобедренный и $\angle BAD = \angle BDA = 15°$.



По теореме синусов $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD} = \dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$,

то есть $\dfrac{4}{\sin 15°} = \dfrac{AD}{\sin 150°}$, откуда $AD = \dfrac{2}{\sin 15°}$.

Тогда $BK = BD \cdot \sin\angle BDA = 8 \cdot \sin 15°$.

Площадь параллелограмма равна $AD \cdot BK = \dfrac{2}{\sin 15°} \cdot 8 \cdot \sin 15° = 16$.

Ответ: 16.

Задания для самостоятельного решения

164. Угол B треугольника ABC равен $30°$. Около треугольника описана окружность радиусом 12. Хорда BK проходит через середину M стороны AC, $MK = 2$. Найдите BM.

165. Радиусы окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, и окружности, описанной около него, равны 2 и 5. Найдите периметр треугольника.

166. Диаметр AM окружности, описанной около треугольника ABC, делит угол A пополам. Известно, что $\sin C = 0{,}25$. Найдите $BM : AC$.

167. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 15, а основания равны 7 и 25. Найдите диаметр описанной около трапеции окружности.

168. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если $BC = 4$ и $AK = 6$.

169. Равнобедренный треугольник вписан в окружность. Радиус окружности равен 9, а основание треугольника равно $8\sqrt{5}$. Найдите расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника.

170. Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ касаются окружности, описанной около треугольника ACD. Найдите площадь этого треугольника, если $AD = 3$, $\angle B = 120°$.

171. Хорда AM, окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC, пересекает его основание BC в точке E, $AE = ME = 3$. Найдите AB.

172. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 90°$, $AB = 5$, $BC = 6$. Радиус вписанной в него окружности равен 2. Найдите площадь четырехугольника.

173. Лучи AC и BC пересекают полуокружность с диаметром AB в точках M и P соответственно, $\angle ABC = 60°$, $CM = CP = 1$. Найдите AB.

174. Окружность радиуса $\sqrt{2}$ проходит через вершину C и середину стороны BC треугольника ABC и касается стороны AB в её середине. Найдите угол C, если $AC = 2$.

175. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AMD и CMD, равно 16, радиус окружности, описанной около треугольника AMB, равен 5, $BD = 12$. Найдите площадь параллелограмма.

176. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. Высоты AH и BK треугольника пересекаются в точке M, $\angle AMB = 105°$. Найдите угол ABO.

177. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на ее большем основании. Боковая сторона трапеции равна 15, радиус окружности равен 12,5. Найдите площадь трапеции.

178. Хорда AM окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC, пересекает его основание BC в точке E, $AE = ME = 3$. Найдите AB.

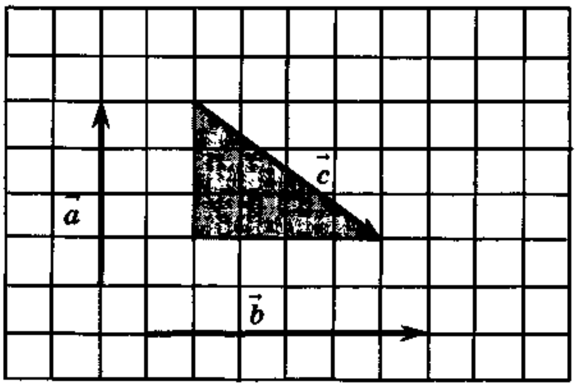
179. Отрезки AM и BE – высоты треугольника ABC, точка O – центр вписанной в него окружности, $AB = 12$, $ME = 6$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AOB.

Векторы и координаты

Вектор – величина, которая характеризуется не только числовым значением, но и направлением. Например, скорость перемещения тела (точки), действующая на тело сила, и т.д. Вектор, как и функция, может быть представлен (задан) разными способами (функция может быть задана таблицей, формулой, геометрической фигурой, словесным описанием...). Вектор может быть задан графически парой точек: исходным и конечным пунктами движения (в переводе с немецкого «пункт» – точка). Их можно обозначить буквами, например, A_1 и A_2 или A и B. Можно использовать другой графический образ – стрелку, выходящую из начальной точки и заканчивающуюся в конечной точке. Часто для обозначения вектора на плоскости используют упорядоченную пару чисел.

Если вектор представлен стрелкой, то его направление видно. Если изображение дано на клетчатой сетке с ячейкой 1 × 1, то величину (длину) вектора легко подсчитать.

Пример 60. Найдите длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, изображённых на клетчатой бумаге с размерами клетки 1 × 1.



Решение.

1) Длина стороны клетки равна 1, значит, длина вектора равна 4, т. е. $|\vec{a}| = 4$.

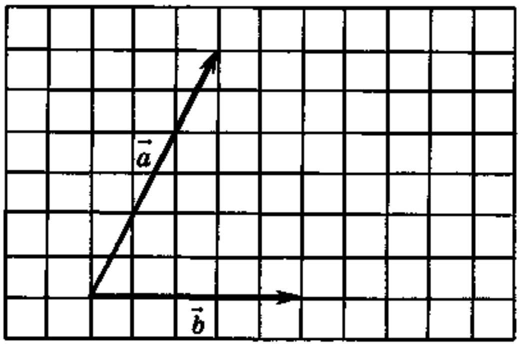
2) Аналогично получаем $|\vec{b}| = 6$.

3) Отрезок, изображающий вектор $\vec{c}$, является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами длины 3 и 4.

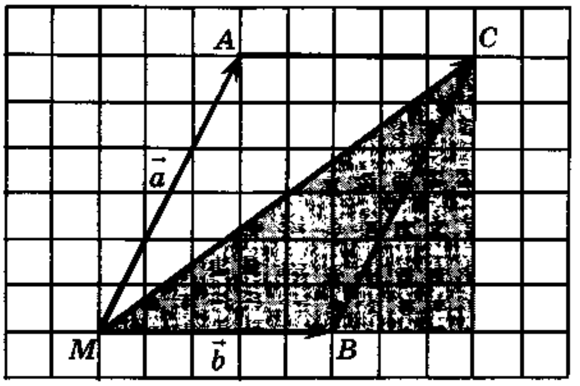
4) Значит, по теореме Пифагора $|\vec{c}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Ответ: 4; 6; 5.

Пример 61. Найдите длину суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на клетчатой бумаге с размерами клетки 1 × 1.



Решение. Поскольку векторы отложены от одной точки, для построения суммы удобно использовать правило параллелограмма. Для этого строим параллелограмм, двумя сторонами которого служат отрезки, изображающие данные векторы. Суммой векторов является вектор $\overrightarrow{MC}$, заданный диагональю параллелограмма, исходящей из общего начала M данных векторов.

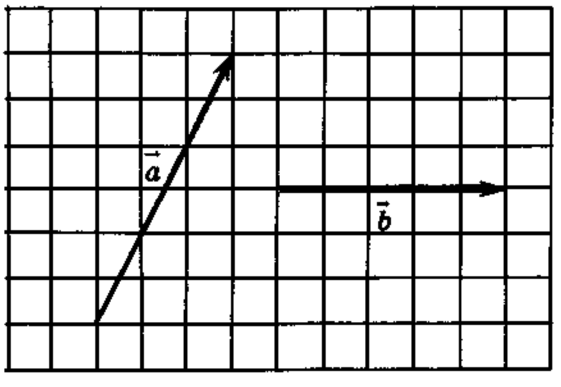


Отрезок, изображающий сумму векторов, является гипотенузой треугольника с катетами 6 и 8. Значит, по теореме Пифагора:

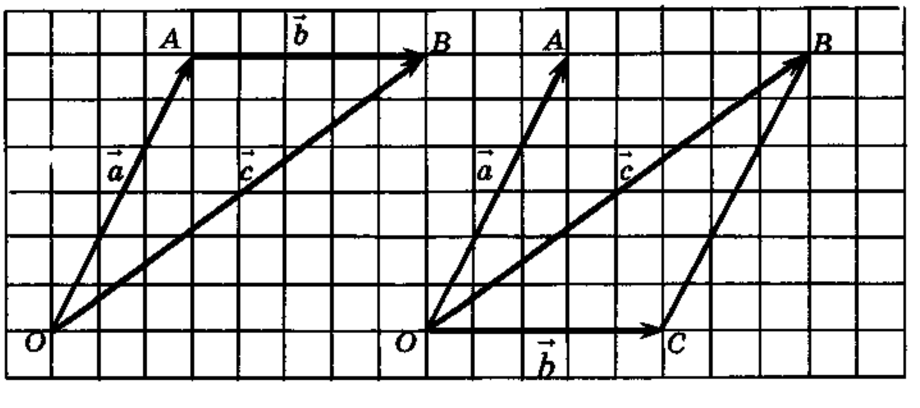
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{6^2+8^2}=10.$$

Ответ: 10.

Пример 62. Найдите длину суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на клетчатой бумаге с размерами клетки 1×1.



Решение. Для построения вектора суммы можно использовать либо правило треугольника (левый рисунок), либо правило параллелограмма (правый рисунок).

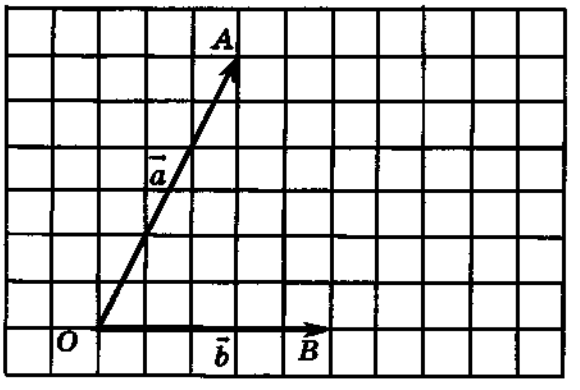


По теореме Пифагора: $|\vec{c}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Ответ: 10.

Замечание. Используя обозначения на рисунке, запишем сумму векторов, полученную по правилу треугольника: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. Заметьте, при переходе от левой части равенства к правой произошло «поглощение» буквы A. Вот так, чисто формально можно упрощать суммы векторов. Например, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$.

Пример 63. Найдите длину разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на клетчатой бумаге с размерами клетки 1×1.



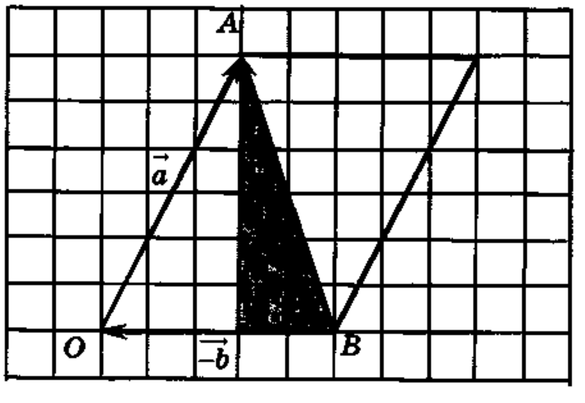
Решение. Используя свойство разности векторов (разность векторов равна сумме вектора-уменьшаемого и вектора, противоположного вычитаемому), получаем:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \overrightarrow{OA} + \left(-\overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$$

(вектор $-\overrightarrow{OB}$, т.е. противоположный вектору $\overrightarrow{OB}$, это – вектор $\overrightarrow{BO}$).

Далее, применив переместительное свойство сложения векторов, получим:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}.$$



Далее по правилу треугольника получаем: $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$.

По теореме Пифагора находим длину вектора $\overrightarrow{BA}$:

$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}.$$

Ответ: $2\sqrt{10}$.

Векторы можно задавать координатами на координатной плоскости. Например, для вектора $\overrightarrow{AB}$ указать координаты начала вектора – точки A и конца вектора – точки B: $A(x_1;\, y_1)$, $B(x_2;\, y_2)$.

Зная координаты начала и конца вектора, можно вычислить координаты x и y этого вектора: $x = x_2 - x_1$; $y = y_2 - y_1$ (из координат конца вектора надо вычесть соответственные координаты начала).

Таким образом, $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\; y_2 - y_1)$.

Пример 64. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2; 3)$, $B(8; -3)$.
Решение. Найдём абсциссу вектора: $x = 8 - 2 = 6$,
затем ординату: $y = -3 - 3 = -6$.
Итак, $\overrightarrow{AB}(6; -6)$
Ответ: (6; −6)

Пример 65. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(3; -2)$, имеет координаты $(-6; 3)$. Найдите абсциссу точки B.

Решение. Подставляя в формулу $x = x_2 - x_1$ абсциссы вектора $\overrightarrow{AB}$ и точки A, получим $-6 = x_2 - 3$, откуда $x_2 = 3 - 6 = -3$.
Ответ: −3.

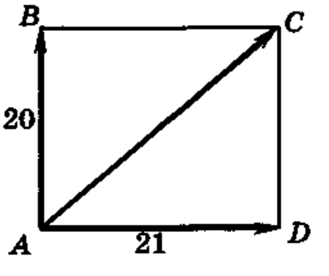
Зная координаты вектора $\vec{a}(x; y)$, можно найти его длину по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Пример 66. Найдите длину вектора $\vec{a}(-5; 12)$.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$.
Ответ: 13.

Пример 67. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(6; -1)$, $B(3; -5)$.
Решение. Найдём координаты x и y вектора $\overrightarrow{AB}$:
$$x = 3 - 6 = -3,\ y = -5 - (-1) = -4.$$
Итак, $\overrightarrow{AB}(-3; -4)$. Следовательно, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$.
Ответ: 5.

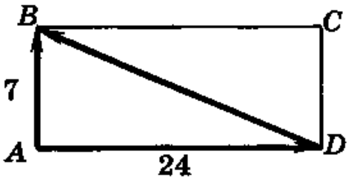
Обратите внимание: длина ненулевого вектора всегда выражается положительным числом!

Пример 68. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 20 и 21. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.



Решение. По правилу параллелограмма получаем: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Длина вектора $\overrightarrow{AC}$ равна длине отрезка AC, который является диагональю прямоугольника. По теореме Пифагора: $AC = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$.
Ответ: 29.

Пример 69. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 7 и 24. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.



Решение. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$;

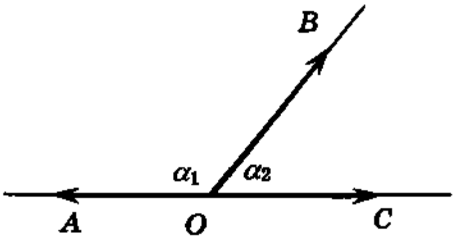
$\left|\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{7^2+24^2}=25$.

Ответ: 25.

Кроме сложения и вычитания векторов в школьном курсе геометрии рассматривается скалярное умножение векторов. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между векторами:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha.$$

Угол между векторами равен углу между лучами, задающими направление векторов: $\alpha_1=\angle AOB$; $\alpha_2=\angle BOC$.



Следует помнить, что косинус острого угла положительный, тупого угла – отрицательный, прямого угла равен нулю. Угол между сонаправленными векторами считается равным нулю $(\cos 0^\circ=1)$, угол между противоположно направленными векторами равен 180° $(\cos 180^\circ=-1)$.

Пример 70. Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 7 и 24. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Решение. Поскольку в прямоугольнике $AB\perp AD$, то угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен 90°, следовательно, его косинус равен нулю. Поэтому $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

Ответ: 0.

Пример 71. Сторона правильного треугольника ABC равна 6. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

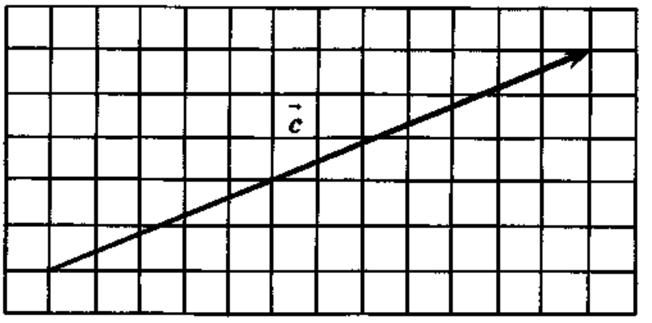
Решение. Поскольку треугольник правильный, все его стороны равны 6, и все углы равны 60°. Поэтому

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\angle BAC=6\cdot6\cdot\cos60^\circ=36\cdot0{,}5=18.$$

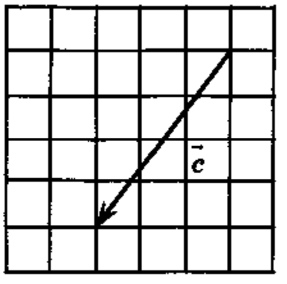
Ответ: 18.

Задачи для самостоятельной работы

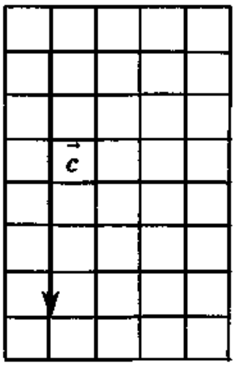
180. Найдите длину вектора $\vec{c}$ (размеры клетки 1×1).



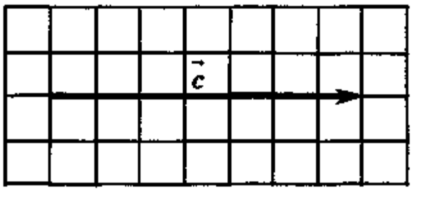
181. Найдите длину вектора $\vec{c}$ (размеры клетки 1×1).



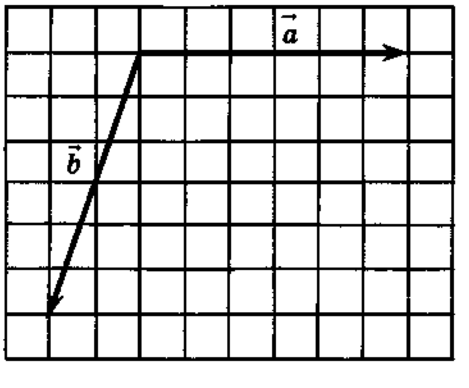
182. Найдите длину вектора $\vec{c}$ (размеры клетки 1×1).



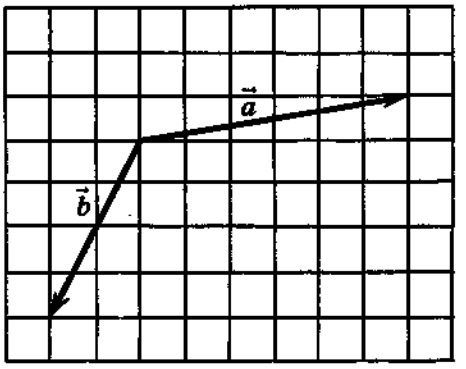
183. Найдите длину вектора $\vec{c}$ (размеры клетки 1×1).



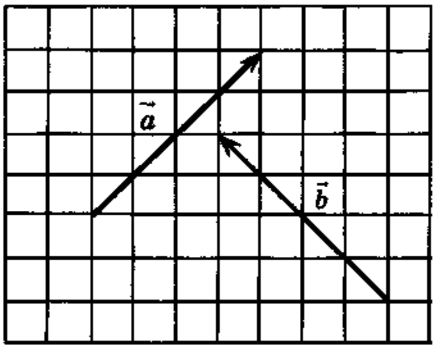
184. Найдите длину суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (размеры клетки 1×1).



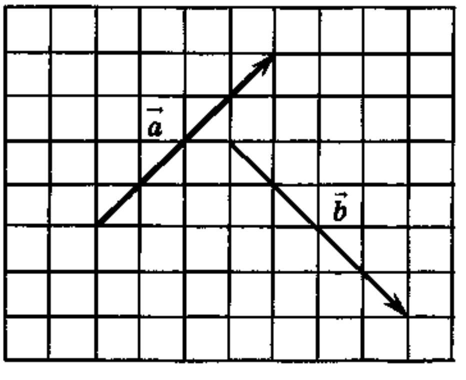
185. Найдите длину суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (размеры клетки 1×1).



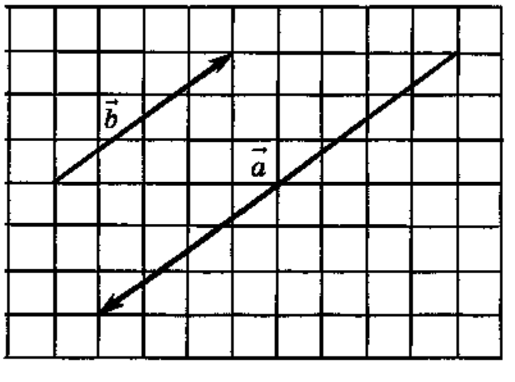
186. Найдите длину суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (размеры клетки 1×1).



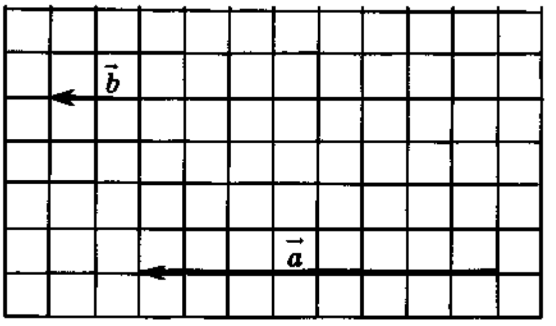
187. Найдите длину суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (размеры клетки 1×1).



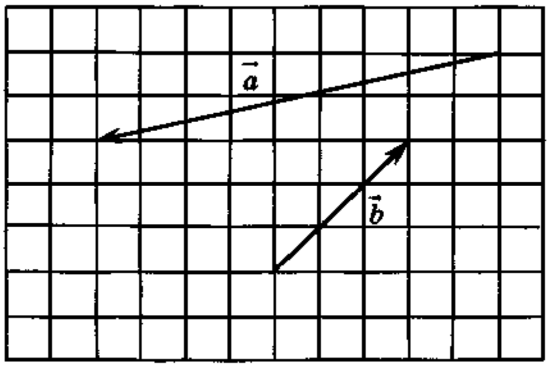
188. Найдите длину суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (размеры клетки 1×1).



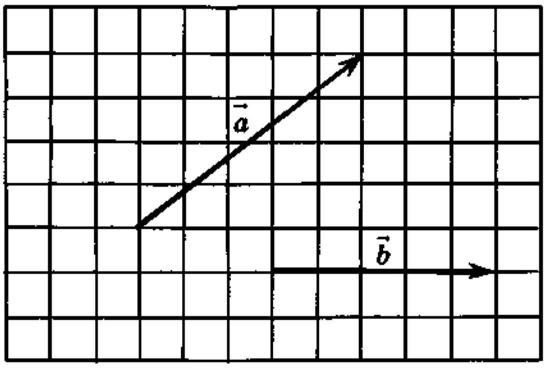
189. Найдите длину суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (размеры клетки 1×1).



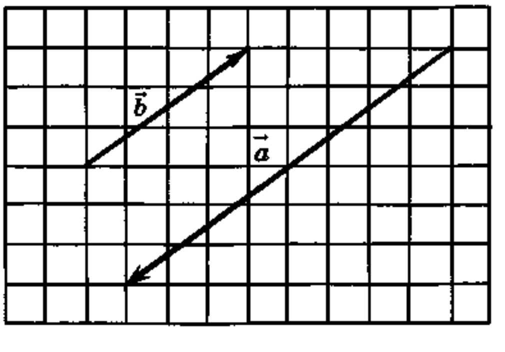
190. Найдите длину разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (размеры клетки 1×1).



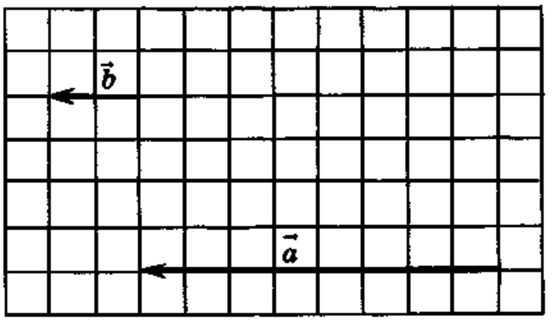
191. Найдите длину разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (размеры клетки 1×1).



192. Найдите длину разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (размеры клетки 1×1).



193. Найдите длину разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (размеры клетки 1×1).



194. Найдите абсциссу вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(5;\ 3)$, $B(2;\ -3)$.

195. Найдите ординату вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(5;\ 3)$, $B(2;\ -3)$.

196. Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2;\ 5)$, $B(6;\ -3)$.

197. Найдите произведение координат вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(0;\ -3)$, $B(8;\ -1)$.

198. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(5;\ -2)$ имеет координаты $(-3;\ 6)$. Найдите абсциссу точки B.

199. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(4;\ -1)$ имеет координаты $(-5;\ 0)$. Найдите ординату точки B.

200. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(5;\ -2)$ имеет координаты $(-3;\ 6)$. Найдите абсциссу точки A.

201. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(-5;\ 2)$ имеет координаты $(3;\ -1)$. Найдите ординату точки A.

202. Найдите длину вектора $\vec{a}(-7;\ 24)$.

203. Найдите длину вектора $\vec{b}(3;\ -4)$.

204. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(6;\ -7)$, $B(-3;\ 5)$.

205. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-6;\ 1)$, $B(18;\ 8)$.

206. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

207. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 35. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

208. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 9 и 12. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

209. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 7 и 24. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

210. Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 1 и $\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

211. Стороны прямоугольника $ABCD$ $AB = 2$ и $BC = 4$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

212. Стороны прямоугольника $ABCD$ $AB = 3$ и $BC = 5$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$.

213. Сторона правильного треугольника ABC равна 4. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

214. Сторона правильного треугольника ABC равна $\sqrt{5}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

215. Сторона ромба $ABCD$ равна 7, $\angle BAD = 120°$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

216. Сторона ромба $ABCD$ равна 8 и равна диагонали AC. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

217. Диагонали ромба $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

218. Диагонали ромба $ABCD$ равны 7 и 24. Найдите длину вектора $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC}$.

219. Сторона ромба $ABCD$ равна 2, $\angle ABC = 120°$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

220. На плоскости отмечены точки $M(1;\ 3)$, $K(-2;\ 3)$ и $P(-1;\ 15)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MP}$.

221. На плоскости отмечены точки $M(-3;\ 4)$, $K(-1;\ 4)$ и $P(3;\ 10)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MP}$.

222. На плоскости отмечены точки $M(2;\ 1)$, $K(3;\ 1)$ и $P(-2;\ 5)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MP}$.

223. На плоскости отмечены точки $A(-8;\ 1)$, $B(-1;\ 9)$ и $C(8;\ -3)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

224. На плоскости отмечены точки $A(-3;\ 4)$, $B(6;\ -2)$ и $C(1;\ 10)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

225. На плоскости отмечены точки $A(-7;\ 4)$, $B(1;\ 6)$ и $C(7;\ -2)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

226. На плоскости отмечены точки $A(-5;\ 2)$, $B(10;\ 4)$ и $C(-2;\ 20)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

227. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трех вершин $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 4)$, $C(7;\ 8)$. Найдите сумму координат вершины D.

228. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трех вершин $A(2;\ -4)$, $B(3;\ -3)$, $C(-5;\ 9)$. Найдите сумму координат вершины D.

МОДЕЛИРУЕМ

В этом разделе содержатся задания, аналогичные заданиям модуля «Реальная математика». Задания этого модуля предназначены для проверки умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, строить и исследовать простейшие математические модели. Это задания, формулировка которых описывает практическую ситуацию, знакомую учащимся или близкую их жизненному опыту.

Для решения таких задач, нужно в ходе анализа условия:

– выделить математические объекты, установить математические отношения и связи между ними;
– построить математическую модель ситуации;
– преобразовать ее, используя известные определения и теоремы;
– полученный ответ выразить в терминах задачи.

Пример 1. На фонарном столбе на высоте 6 метров закреплена лампа. Девочка стоит в 4 шагах от столба. Длина ее тени равна 1 шагу. Найдите рост девочки в сантиметрах.

Решение. Высота крепления лампы – это расстояние точки крепления лампы от поверхности земли. Изобразим поверхность земли линией, столб – отрезком, верхний конец которого – точка крепления лампы (рис. 1). Отрезок CD используем для изображения девочки. Луч света лампы касается макушки головы девочки и ограничивает тень (точка T). Поскольку девочка стоит на расстоянии 4 шагов от столба, а длина тени девочки равна 1 шагу, то $AC = 4CM$. Таким образом, чтобы найти рост девочки, нужно, зная длину отрезка AB, вычислить длину отрезка CD. Построенный в ходе анализа условия чертеж (рис. 2) является **геометрической моделью** описанной в задаче ситуации.

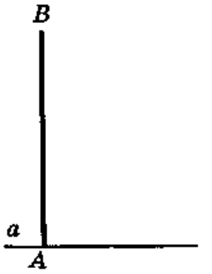


Рис. 1

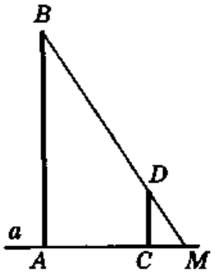


Рис. 2

Прямоугольные треугольники MAB и MCD имеют общий угол M, значит, они подобны. Поэтому в качестве **математического метода** преобразования модели используем метод подобия.

В подобных треугольниках MAB и MCD стороны AB и CD пропорциональны сходственным сторонам AM и CM, т.е. $\frac{AB}{CD} = \frac{AM}{CM}$.

Поскольку $AM = AC + CM = 4CM + CM = 5CM$, то $\frac{AM}{CM} = 5$.

Подставив в пропорцию числовые данные, получим: $\frac{6}{CD} = 5$.

Следовательно, $CD = 1{,}2$ (м). Выразим ответ в сантиметрах: 1,2 м = 120 см.
Таким образом, рост девочки равен 120 см.
Ответ: 120 см.

Разумеется, описание решения приведено здесь только для иллюстрации процесса моделирования. На экзамене требуется написать лишь ответ к задаче.

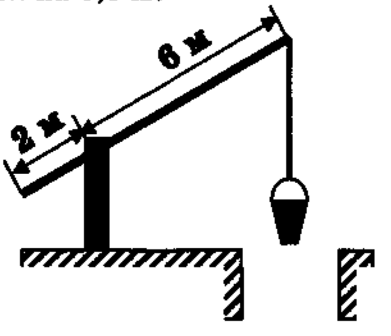
Задания для самостоятельной работы

1. На фонарном столбе на высоте 6 метров закреплена лампа. Девочка стоит в 3 шагах от столба. Длина ее тени равна 1 шагу. Найдите рост девочки в сантиметрах.

2. На фонарном столбе на высоте 6,03 метров закреплена лампа. Мужчина стоит в 4 шагах от столба. Длина его тени равна 2 шагам. Найдите рост мужчины в сантиметрах.

3. На фонарном столбе на высоте 6,96 метров закреплена лампа. Мужчина стоит в 6 шагах от столба. Длина его тени равна 2 шагам. Найдите рост мужчины в сантиметрах.

4. На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 2 м, а длинное плечо – 6 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 0,5 м?



5. Найдите градусную меру угла между часовой и минутной стрелками часов в 7 часов 30 минут.

6. Найдите градусную меру угла между часовой и минутной стрелками часов в 9 часов 30 минут.

7. Найдите градусную меру угла между часовой и минутной стрелками часов в 1 час 30 минут.

8. Найдите градусную меру угла между часовой и минутной стрелками часов в 3 часа 30 минут.

9. Какой угол описывает часовая стрелка часов за 4 часа? Ответ запишите в градусах.

10. Какой угол описывает часовая стрелка часов за 7 часов? Ответ запишите в градусах.

11. Какой угол описывает минутная стрелка часов за 55 минут? Ответ запишите в градусах.

12. На какую длину нужно раздвинуть раздвижную лестницу, чтобы ее верхний конец доставал до карниза дома на высоте 6 метров, а нижний отстоял от стены на 2,5 метра? Ответ запишите в метрах.

13. На каком расстоянии от стены нужно закрепить нижний конец лестницы, чтобы ее верхний конец доставал до карниза дома на высоте 6 метров, если длина лестницы 6,5 метров? Ответ запишите в метрах.

14. На каком расстоянии от стены нужно закрепить нижний конец лестницы, чтобы ее верхний конец доставал до карниза дома на высоте 12 метров, если длина лестницы 12,5 метров? Ответ запишите в метрах.

15. От столба высотой 12 м к дому натянут провод, который крепится на высоте 4 м от земли. Расстояние от дома до столба 15 м. Вычислите длину провода.

16. В цирке к вершинам двух мачт привязан трос. Когда канатоходец дошел до середины троса, его натяжение ослабили так, что он опустился до арены. На каком расстоянии от мачты высотой 6 метров канатоходец коснулся арены, если высота второй мачты 4 метра, а расстояние между ними 10 метров? Ответ запишите в метрах.

17. На вершинах ёлок сидят две вороны. Высоты деревьев равны 5 м и 7 м. Расстояние между ними 12 м. На каком расстоянии от первой ёлки на земле надо положить сыр для этих ворон, чтобы расстояние от них до сыра были одинаковыми? Ответ запишите в метрах.

18. На расстоянии 12 м друг от друга растут две ёлки. Высота одной 16 м, а другой 11 м. С вершины на вершину перепрыгнула белка. Найдите расстояние (в метрах), которое она преодолела.

19. Солнечные лучи падают на землю под углом 30°. Найдите высоту дерева, если длина его тени 3 метра. Ответ запишите в метрах, округлив его до десятых.

20. Найдите угол падения солнечных лучей, если длина тени забора равна его высоте. Ответ запишите в градусах.

21. Солнечные лучи падают на землю под углом 60°. Какой длины тень отбрасывает вертикально воткнутый в землю шест, высотой 5 метров? Ответ запишите в метрах, округлив его до десятых.

22. Радиомачта, высотой 20 метров, закреплена на растяжках, идущих от середины мачты до точек крепления к земле. Найдите, под каким углом к мачте расположены растяжки, если их длина равна 20 метрам. Ответ запишите в градусах.

23. Радиомачта, высотой 32 метра, закреплена на растяжках, идущих от середины мачты до точек крепления к земле. Найдите, под каким углом к земле расположены растяжки, если их длина равна 32 метрам. Ответ запишите в градусах.

24. Радиомачта закреплена на растяжках, идущих от середины мачты до точек крепления к земле. Найдите длину растяжек (в метрах), если они расположены под углом 60° к мачте, а ее высота равна 24 метра.

25. Радиомачта закреплена на растяжках, идущих от середины мачты до точек крепления к земле. Найдите длину растяжек (в метрах), если они расположены под углом 30° к земле, а ее высота равна 26 метров.

26. Неогороженный земельный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 30 метров и 45 метров. Найдите длину забора, который будет установлен по границе этого участка. Ответ запишите в метрах.

27. Рабочие использовали 122 метра ленты для ограждения котлована прямоугольной формы. Ширина котлована 17 метров. Найдите его длину в метрах.

28. Футбольное поле в форме прямоугольника имеет площадь 7140 $м^2$. Его длина равна 105 метров. Найдите ширину поля в метрах.

29. Длина волейбольной площадки в два раза больше её ширины, а площадь равна 162 $м^2$. Найдите длину площадки. Ответ запишите в метрах.

30. Лестница из 12 ступенек высотой 15 см, шириной 20 см покрыта ковровой дорожкой шириной 65 см. Какова площадь этой ковровой дорожки? Ответ запишите в квадратных метрах.

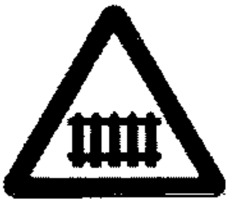
31. Поверхность откидного столика имеет форму равнобедренной (равнобокой) трапеции с основаниями 40 см, 60 см и высотой 50 см. Определите его площадь. Ответ запишите в квадратных метрах.

32. Сколько осей симметрии имеет буква Н, изображенная на рисунке?

33. Сколько осей симметрии имеет буква Х, изображенная на рисунке?

34. Сколько осей симметрии имеет буква П, изображенная на рисунке?

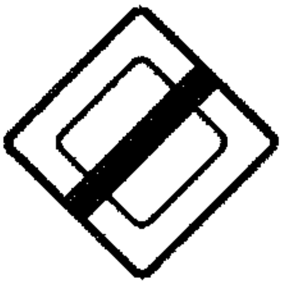
35. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?



36. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?

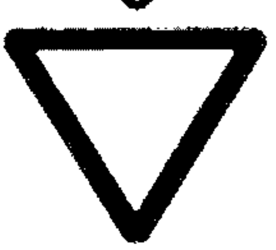
37. Какой из дорожных знаков, изображенных на рисунке, имеет только одну ось симметрии?

1)

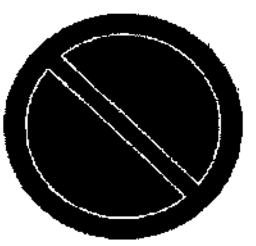


3)

2)

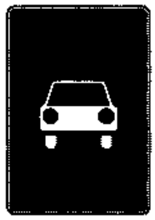


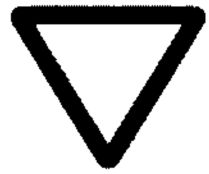
4)



38. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?

39. Какой из дорожных знаков, изображенных на рисунке, имеет центр симметрии?

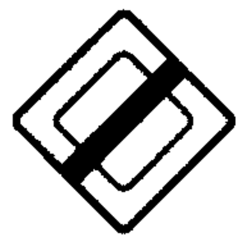
1) 

3) 

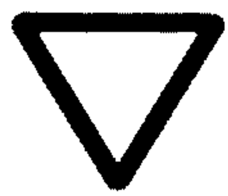
2) 

4) 

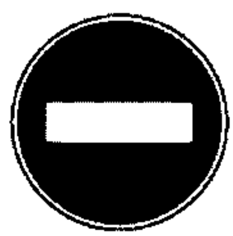
40. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?



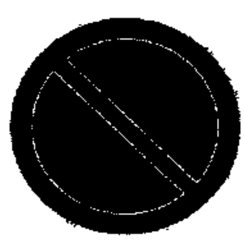
41. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?



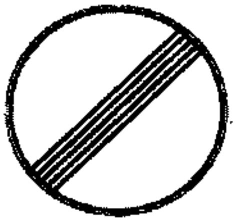
42. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?



43. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?



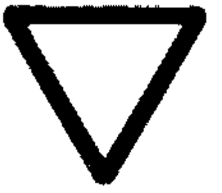
44. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?



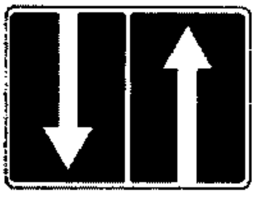
45. Какой из дорожных знаков, изображенных на рисунке, имеет только две оси симметрии?

1)

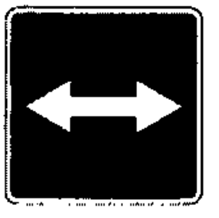
3)



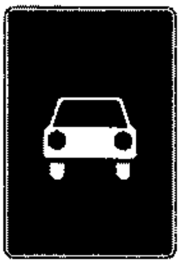
2)



4)

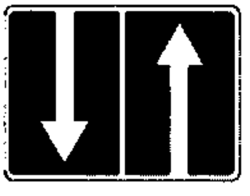


46. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?



47. Какой из дорожных знаков, изображенных на рисунке, не имеет центра симметрии?

1)

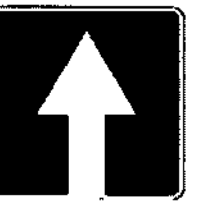


3)

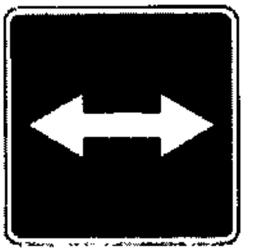
2)

4)

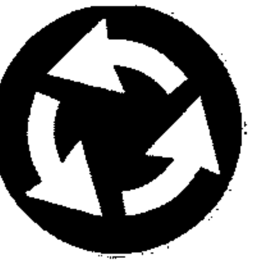
48. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?



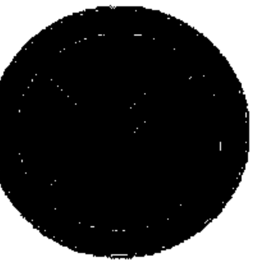
49. Сколько осей симметрии имеет изображенный на рисунке дорожный знак?



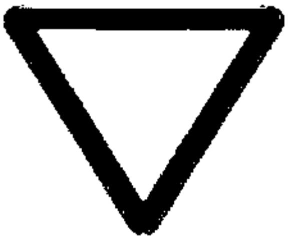
50. На какой наименьший положительный угол нужно повернуть изображенный на рисунке дорожный знак так, чтобы он совпал с собой? Ответ дайте в градусах.



51. На какой наименьший положительный угол нужно повернуть изображенный на рисунке дорожный знак так, чтобы он совпал с собой? Ответ дайте в градусах.



52. На какой наименьший положительный угол нужно повернуть дорожный знак так, чтобы он совпал с собой? Ответ дайте в градусах.



53. Какой из дорожных знаков, изображенных на рисунке, нужно повернуть на 120° так, чтобы он совпал с собой?

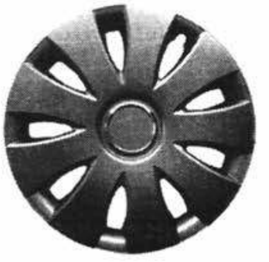
1) 

3) 

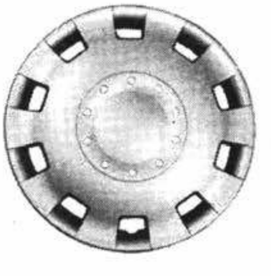
2) 

4) 

54. На какой наименьший положительный угол нужно повернуть колпак автомобильного колеса так, чтобы он совпал с собой? Ответ дайте в градусах.



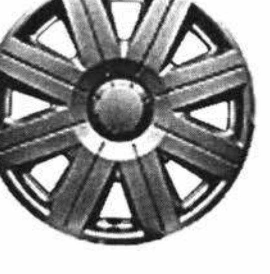
55. На какой наименьший положительный угол нужно повернуть колпак автомобильного колеса так, чтобы он совпал с собой? Ответ дайте в градусах.



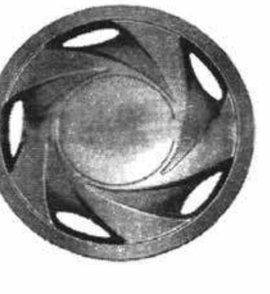
56. На какой наименьший положительный угол нужно повернуть колпак автомобильного колеса так, чтобы он совпал с собой? Ответ дайте в градусах.

57. На какой наименьший положительный угол нужно повернуть колпак автомобильного колеса так, чтобы он совпал с собой? Ответ дайте в градусах.

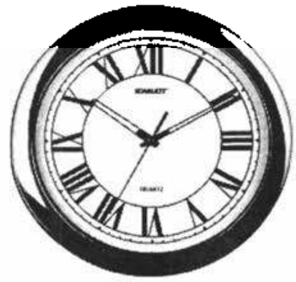
58. На какой наименьший положительный угол нужно повернуть колпак автомобильного колеса так, чтобы он совпал с собой? Ответ дайте в градусах.



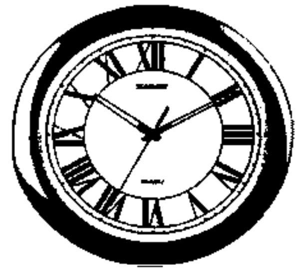
59. На какой наименьший положительный угол нужно повернуть колпак автомобильного колеса так, чтобы он совпал с собой? Ответ дайте в градусах.



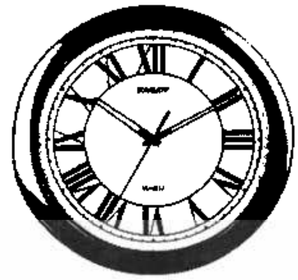
60. Найдите градусную меру угла между часовой и минутной стрелками.



61. Найдите градусную меру угла между минутной и секундной стрелками.



62. Найдите градусную меру угла между часовой и секундной стрелками.



63. Найдите градусную меру угла между часовой и минутной стрелками.

64. Какой угол описывает минутная стрелка за 10 минут? Ответ дайте в градусах.

65. Какой угол описывает минутная стрелка за 25 минут? Ответ дайте в градусах.

66. Какой угол описывает минутная стрелка за 18 минут? Ответ дайте в градусах.

67. Какой угол описывает часовая стрелка за 1 час? Ответ дайте в градусах.

68. Какой угол описывает часовая стрелка за 4 часа? Ответ дайте в градусах.

69. Какой угол описывает часовая стрелка за 5 часов? Ответ дайте в градусах.

70. За какое время минутная стрелка поворачивается на угол, равный 90°? Ответ дайте в минутах.

71. За какое время минутная стрелка поворачивается на угол, равный 18°? Ответ дайте в минутах.

72. За какое время минутная стрелка поворачивается на угол, равный 162°? Ответ дайте в минутах.

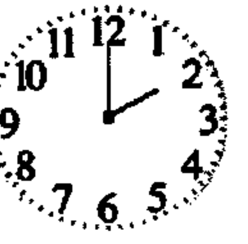
73. За какое время часовая стрелка поворачивается на угол, равный 60°? Ответ дайте в часах.

74. За какое время часовая стрелка поворачивается на угол, равный 90°? Ответ дайте в часах.

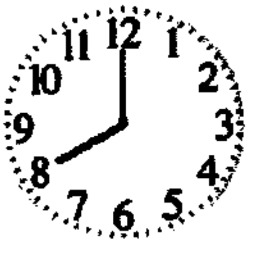
75. За какое время часовая стрелка поворачивается на угол, равный 180°? Ответ дайте в часах.

76. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 5 часов? Ответ дайте в градусах.

77. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 2 часа? Ответ дайте в градусах.

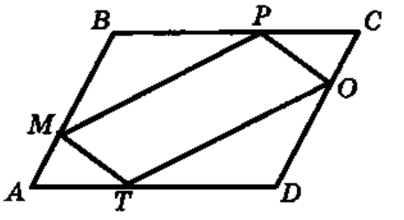


78. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 8 часов? Ответ дайте в градусах.



ДОКАЗЫВАЕМ

В контрольно-измерительные материалы ГИА включена одна задача на доказательство. Проверка доказательств, выполненных учащимися, осуществляется экспертами на основе единых критериев.



Пример 1. На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M, P, O, T так, что $AM = CO$ и $BP = DT$. Докажите, что четырехугольник $MPOT$ – параллелограмм.

Решение. В параллелограмме $ABCD$ $AB = CD$, $AM = CO$, следовательно, $BM = DO$.

Треугольники MBP и ODT равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $MP = OT$.

Аналогично доказывается, что $\Delta AMT = \Delta DOT$. Значит, $MT = PO$.

Следовательно, четырехугольник $MPOT$ – параллелограмм.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
1	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	*Максимальный балл*

Приведенное доказательство верное и все шаги обоснованы. Следовательно, его можно оценить на 3 балла.

Задания для самостоятельной работы

Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведенные к его боковым сторонам, равны.

2. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные к его боковым сторонам, равны.

3. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные к его боковым сторонам, равны.

4. На медиане BO треугольника ABC произвольно выбрана точка P. Докажите, что если $AP=CP$, то BO – биссектриса.

5. На медиане AK треугольника ABC произвольно выбрана точка M. Докажите, что если $BM = CM$, то $\angle BAK = \angle CAK$.

6. На медиане CP треугольника ABC произвольно выбрана точка O. Докажите, что если $AO=BO$, то $AC=BC$.

7. В треугольнике ABC угол C прямой, точки M, K, P – середины сторон AB, AC, BC соответственно. Докажите, что угол KMP прямой.

8. В треугольнике ABC угол C прямой, точки M, K, P – середины сторон AB, AC, BC соответственно. Докажите, что $KM \perp PM$.

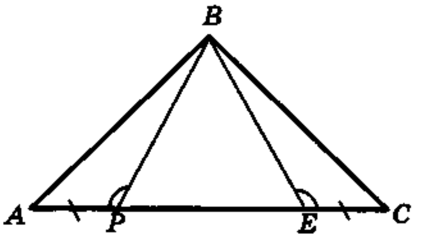
9. В треугольнике ABC точки M, K, P – середины сторон AB, AC, BC соответственно. Докажите, что треугольники MKP и CKP равны.

10. В равностороннем треугольнике ABC точки M, K, P – середины сторон AB, AC, BC соответственно. Докажите, что треугольник MKP равносторонний.

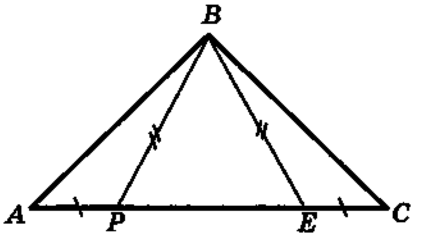
11. Точки A, B, C – середины сторон равностороннего треугольника MKP. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

12. Точки M, K, P – середины сторон равностороннего треугольника ABC. Докажите, что $\angle MKP = 60°$.

13. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки P и E так, что $AP = CE$. Оказалось, что $\angle BPA = \angle BEC$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.



14. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки P и E так, что $AP = CE$. Оказалось, что $BP = BE$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.



15. В треугольнике ABC $\angle ACB = 45°$, точки M, T, P – середины сторон AB, AC, BC соответственно. Докажите, что $\angle TMP = 45°$.

16. Точки M, T, P середины сторон треугольника ABC, $\angle MTP = 90°$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

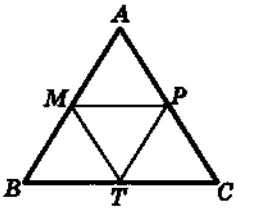
17. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CH – высота. Докажите, что $CH^2 = AH \cdot BH$.

18. Точка B лежит на стороне EM треугольника CEM, $\angle CEB = 95°$, $\angle CBM = 110°$, $\angle CME = 15°$. Докажите, что $CE^2 = BE \cdot EM$.

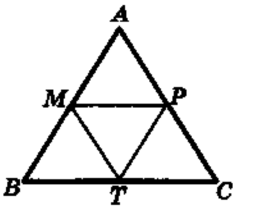
19. Точка B лежит на стороне ET треугольника CET, $\angle CEB = 105°$, $\angle CBT = 140°$, $\angle CTE = 35°$. Докажите, что $CE^2 = BE \cdot ET$.

20. Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

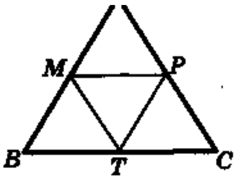
21. Точки M, P, T – середины сторон AB, BC, CA правильного треугольника ABC. Докажите, что треугольник MPT равносторонний.



22. Точки M, P, T – середины сторон правильного треугольника ABC. Докажите, что площадь треугольника MPT составляет четверть площади треугольника ABC.



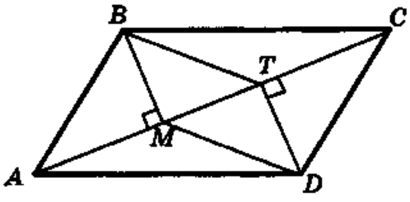
23. Точки M, P, T – середины сторон правильного треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $AMPT$ – ромб.



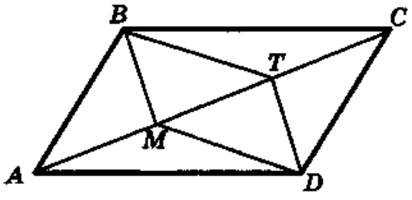
24. Точка M – середина стороны AB параллелограмма $ABCD$, $CM = MD$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

25. Точка M – середина стороны AB ромба $ABCD$, $CM = MD$. Докажите, что данный ромб – квадрат.

26. Отрезки BM и DT – перпендикуляры к диагонали AC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $BMDT$ – параллелограмм.



27. Точки M и T делят диагональ AC параллелограмма $ABCD$ на три равных отрезка. Докажите, что четырехугольник $BMDT$ –параллелограмм.



28. Точка K лежит на стороне BC квадрата $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника AKD равна половине площади квадрата $ABCD$.

29. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника. Докажите, что площади получившихся треугольников равны.

30. Докажите, что площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей.

31. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

32. В выпуклом четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей.

33. Докажите, что площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними

34. Докажите, что диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника.

35. Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих (т. е. равных по площади) треугольника.

36. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

37. Докажите, что при пересечении биссектрис соседних углов параллелограмма образуются прямые углы.

38. Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, равен острому углу параллелограмма.

39. Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины острого угла, равен большему углу параллелограмма.

40. Точки M, K, P, F – середины сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $MK = PF$.

41. Точки M, K, P, F – середины сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $MKPF$ – параллелограмм.

42. В параллелограмме $MKPF$ проведены высоты KO и KE к сторонам MF и PF соответственно, $KO = KE$. Докажите, что $MKPF$ – ромб.

43. Докажите, что если сумма длин трех любых сторон параллелограмма равна одному и тому же числу, то его диагонали пересекаются под прямым углом.

44. Докажите, что если сумма длин трех любых сторон параллелограмма равна одному и тому же числу, то этот параллелограмм – ромб.

45. Докажите, что если сумма длин трех любых сторон параллелограмма равна одному и тому же числу, то в этот параллелограмм можно вписать окружность.

46. В параллелограмме $ABCD$ точка P – середина стороны AD, $PB = PC$. Докажите, что $ABCD$ – прямоугольник.

47. В параллелограмме $ABCD$ точка P – середина стороны AD, $PB = PC$. Докажите, что этот параллелограмм можно вписать в окружность.

48. Докажите, что при пересечении биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, образуются прямые углы.

49. Докажите, что биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.

50. Докажите, что средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.

51. Диагональ равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне CD, $\angle BAD = 60°$. Точка K лежит на основании AD и является центром окружности, описанной около треугольника ACD. Докажите, что $ABCK$ – ромб.

52. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне CD, $\angle BAD = 60°$. На основании AD отмечена точка K так, что $ABCK$ – ромб. Докажите, что точка K – центр окружности, описанной около треугольника ACD.

53. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне CD, $\angle BAD = 60°$. На основании AD отмечена точка K так, что $ABCK$ ромб. Докажите, что точка $AD = 2BC$.

54. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD соответственно равны 5 и 20, диагональ BD=10. Докажите, что треугольники ABD и BCD подобны.

55. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Докажите, что площади треугольников ABD и ACD равны.

56. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

57. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что $\angle A + \angle C = 180°$.

58. Ромб вписан в окружиость. Докажите, что этот ромб является квадратом.

59. Окружности с центрами O и Q пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая OQ делит хорду AB пополам.

60. Окружности с центрами O и Q пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямые AB и OQ перпендикулярны.

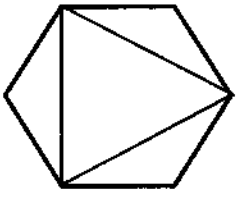
61. Диаметр окружности пересекает хорду AB в точке C и перпендикулярен этой хорде. Докажите, что $AC = CB$.

62. Диаметр окружности пересекает хорду AB в точке C, $AC = CB$. Докажите, что данный диаметр перпендикулярен хорде AB.

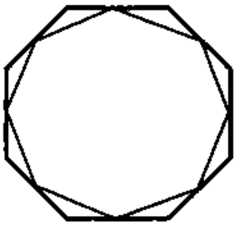
63. Докажите, что отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.

64. Через точку A проведены касательная AB (B – точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D. Докажите, что $AB^2=AC \cdot AD$.

65. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках B и C, а другая – в точках D и F. Докажите, что $AB \cdot AC = AD \cdot AF$.



66. Вершины правильного шестиугольника последовательно соединили отрезками через одну. Докажите, что получился правильный треугольник.



67. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины сторон правильного восьмиугольника, то получится правильный восьмиугольник.

ОТВЕТЫ

АНАЛИЗИРУЕМ

Номера верных утверждений: 2; 5; 6; 8; 9, 11; 14; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 30; 32; 33; 36; 37; 38; 39; 40; 42; 43, 45; 47; 48; 50.

51. 3,4.

52. 2, 4.

53. 3, 4.

54. 2, 3, 4.

55. 1, 2, 4.

56. 1, 3, 4.

57. 1, 3.

58. 1, 2, 4.

59. 1, 4.

60. 3, 4.

61. 1, 3.

62. 2, 3, 4.

63. 1, 2, 3, 4.

64. 1, 2, 3.

65. 1, 2, 3, 4.

66. 2.

67. 3, 4.

68. 1.

69. 1, 2.

70. 1, 2, 3.

71. 2, 3.

72. 1, 3.

73. 3, 4.

74. 1, 3, 4.

75. 3, 4.

ВЫЧИСЛЯЕМ

1. 135, 45.
2. 74.
3. 74.
4. 18, 18, 162, 162.
5. 41, 41, 35.
6. 20, 50.
7. 54.
8. 64.
9. 22.
10. 75.
11. 83.
12. 90.
13. 8.
14. 42.
15. 0,25.
16. 24.
17. 9.
18. 10,5.
19. $0{,}4\sqrt{6}$.
20. 60.
21. $6\sqrt{5}$.
22. 1,6.
23. 20.
24. 12.
25. 40,8.
26. $3\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$.
27. 60.
28. 8.
29. 150.
30. 17,6.
31. $27\sqrt{3}$.
32. $10:\sqrt[4]{6}$.
33. 1,44.
34. 45°, 135°.
35. 4.
36. $\frac{11}{3}$.
37. $\sqrt{11}$.
38. $\sqrt{13}$.
39. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$.
40. 24.
41. 176.
42. 28.
43. 9.
44. 3,5.
45. 84°.
46. 76°.
47. 10.
48. 105°.
49. 18.
50. 65.
51. 77.
52. в 60.
53. 13.
54. 100.
55. 16.
56. 40.
57. 14.
58. 28
59. $162\sqrt{3}$.
60. 12.
61. 150°.
62. 18.
63. 9.
64. 14.
65. 38,4.
66. 52.
67. 450.
68. 64.
69. 10.
70. 168.
71. 110°.
72. 10.
73. 18.
74. 8 и 12.
75. 98.
76. 50.
77. 144°.
78. 60.
79. 42.
80. 12.
81. 4.
82. 40.
83. 30.
84. 24.
85. 4,8.
86. 30.
87. 16.
88. 336.
89. 24.
90. 20.
91. 18.
92. 10.
93. 272.
94. 98.
95. 1.
96. 20.
97. 15.
98. 90.
99. 12.
100. 24.
101. 200.
102. 3,5.
103. 25.
104. 36.
105. 22,4.
106. 3,2.
107. 16,5.
108. $4\sqrt{15}$.
109. 33.
110. 8.
111. $9\sqrt{5}$
112. 45°
113. 47°
114. 82°
115. 30°.

116. 7.
117. 70°.
118. 5.
119. 2.
120. 6.
121. 2.
122. 6.
123. 4.
124. 5.
125. 12.
126. 5.
127. 7.
128. 4.
129. 15.
130. 26.
131. 34.
132. 5π.
133. 16.
134. 9π.
135. 26.
136. 5.
137. 130.
138. 156.
139. 3.
140. 6.
141. 624.
142. 3.
143. 3.
144. 18.
145. 60.
146. 12.
147. 5.
148. $\sqrt{313}$.
149. 10.
150. 2.
151. 3.
152. 18.
153. 12,8.
154. 60°.
155. $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.
156. $14+8\sqrt{3}$.
157. 672.
158. $2\sqrt{6}$.
159. $15,5+0,5\sqrt{129}$.
160. 10.
161. 84.
162. 1.
163. $\frac{3}{\sqrt{17}}$.
164. $3\sqrt{2}$.
165. 18.
166. 24.
167. 24,5.
168. 12,5.
169. 2.
170. 6; $3\sqrt{5}$.
171. $3\sqrt{2}$.
172. $\frac{300}{17}$.
173. 2.
174. 30°; 150°.
175. $\frac{192}{17}$; $\frac{1728}{25}$.
176. 15.
177. 192.
178. $6\sqrt{2}$.
179. 6.
180. 13.
181. 5.
182. 6.
183. 6.
184. $2\sqrt{13}$.
185. 5.
186. 8.
187. 8.
188. 5.
189. 10.
190. $2\sqrt{13}$.
191. 4.
192. 15.
193. 10.
194. −3.
195. −6.
196. −4.
197. 16.
198. 2.
199. −1.
200. 8.
201. 3.
202. 25.
203. 5.
204. 15.
205. 25.
206. 20.
207. 37.
208. 15.
209. 25.
210. 0.
211. 4.
212. −25.
213. 8.
214. −2,5.
215. −24,5.
216. 32.
217. 10.
218. 25.
219. 2.
220. 13.
221. 10.
222. 5.
223. 15.
224. 13.
225. 10.
226. 20.
227. 11.
228. 2.

МОДЕЛИРУЕМ

1. 150.
2. 201.
3. 174.
4. 1,5.
5. 45.
6. 105.
7. 135.
8. 75.
9. 120.
10. 210.
11. 330.
12. 6,5.
13. 2,5.
14. 3,5.
15. 17.
16. 4.
17. 7.
18. 13.
19. 1,8.
20. 45.
21. 3.
22. 60.
23. 30.
24. 24.
25. 26.
26. 150.
27. 44.
28. 68.
29. 18.
30. 2,73.
31. 0,25.
32. 2.
33. 2.
34. 1.
35. 1.
36. 1.
37. 3.
38. 1.
39. 2.
40. 2.
41. 3.
42. 2.
43. 2.
44. 2.
45. 4.
46. 1.
47. 2.
48. 1.
49. 2.
50. 120.
51. 90.
52. 120.
53. 3.
54. 40.
55. 36.
56. 36.
57. 30.
58. 45.
59. 72.
60. 114.
61. 150.
62. 96.
63. 132.
64. 60.
65. 150.
66. 108.
67. 30.
68. 120.
69. 150.
70. 15.
71. 3.
72. 27.
73. 2.
74. 23.
75. 6.
76. 150.
77. 60.
78. 120.